Elżbieta Świda

Marcin Kurczab

PLAN WYNIKOWY

do serii

matematyka w liceum i technikum

napisany do nowej podstawy programowej

ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego dostosowany jest do programu nauczania matematyki w liceach i technikach autorstwa Krzysztofa Kłaczkowa, Marcina Kurczaba oraz Elżbiety Świdy: zakres podstawowy – numer dopuszczenia DKOS – 4015 – 11/02 oraz zakres rozszerzony – numer dopuszczenia DKOS – 4015 – 12/02. Przeznaczony jest dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikami i zbiorami zadań do matematyki autorstwa Krzysztofa Kłaczkowa, Marcina Kurczaba oraz Elżbiety Świdy, wydanymi przez Oficynę Edukacyjną * Krzysztof Pazdro. Plan ten jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien posiadać uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:

- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.
Ocenę dopuszczającą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40% – 60% wymagań podstawowych, zaś ocenę dostateczną uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 60 % wymagań podstawowych.
Ocenę dobrą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 75% wymagań dopełniających, zaś ocenę bardzo dobrą uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 75% wymagań dopełniających.
Ocenę celującą powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.

Aby ułatwić nauczycielom, uczniom oraz ich rodzicom korzystanie z planu wynikowego, dla poszczególnych wymagań przedstawiamy przykładowe zadania, które dokładniej określają stopień trudności problemów wymaganych na poszczególne oceny. Przedstawione zadania **nie mogą** w żadnym wypadku stanowić przykładowego zbioru zadań, z którego nauczyciel powinien czerpać zadania na ewentualny egzamin sprawdzający, mają jedynie wskazać stopień trudności zadań na poszczególne oceny.

Plan wynikowy nie może być “dokumentem sztywnym”. Zakładamy, że każdy nauczyciel zmodyfikuje ten plan dostosowując go zarówno do liczby godzin przeznaczonych na realizację materiału jak również do możliwości uczniów.

Nauczycieli, którzy będą korzystać z przedstawionego planu wynikowego prosimy o wskazówki i uwagi.

Elżbieta Świda i Marcin Kurczab

ZAKRES PODSTAWOWY

Spis treści

1. Elementy logiki

Tematyka zajęć:

- Zdanie w logice i jego negacja.
- Koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań.
- Niektóre prawa logiczne i ich zastosowanie.
- Forma zdaniowa jednej zmiennej.
- Kwantyfikator ogólny i szczegółowy. Negacja zdania z kwantyfikatorem.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi; – umie określić wartość logiczną zdania prostego; – potrafi zanegować zdanie proste i określić wartość logiczną zdania zanegowanego; – potrafi rozpoznać zdania w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań; – potrafi zbudować zdania złożone w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań z danych zdań prostych; – potrafi określić wartości logiczne zdań złożonych, takich jak koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań; – zna prawa De Morgana (prawo negacji alternatywy oraz prawo negacji koniunkcji) i potrafi je stosować; – potrafi określić wartość logiczną zdania	Uczeń: – potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne; – potrafi wnioskować o wartości zdania złożonego, na podstawie informacji o wartościach logicznych innych wyrażeń rachunku zdań; – rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę; – potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego; – zna prawo negacji implikacji i potrafi je stosować; – rozumie zwrot “dla każdego x ....” oraz “istnieje takie x, że ....” i potrafi stosować te zwroty budując zdania logiczne; – potrafi ocenić wartość logiczną zdania z kwantyfikatorem;	Uczeń: – potrafi udowodnić poznane prawa logiczne; – potrafi negować zdania złożone; – potrafi stosować wiadomości z logiki do wnioskowania matematycznego.

powstałego po negacji koniunkcji oraz alternatywy zdań; – odróżnia formę zdaniową jednej zmiennej od zdania; – potrafi określić dziedzinę prostej formy zdaniowej; – potrafi wskazać element dziedziny spełniający daną formę zdaniową.	– zna prawa De Morgana dla zdań z kwantyfikatorem; – potrafi podać negację zdania z kwantyfikatorem i ocenić jej wartość logiczną; – potrafi wskazać formę zdaniową sprzeczną i tożsamościową; – potrafi określić zbiór wszystkich elementów spełniających daną formę zdaniową prostą.	
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> Wśród poniższych wypowiedzi znajdują się zdania logiczne. Wskaż je. Oceń wartości logiczne zdań. 1) Wyjdź do ogrodu! 2) Czy dzisiaj jest klasówka z matematyki? 3) Liczba 3 jest większa od liczby 8. 4) a jest liczbą parzystą. 5) Warszawa jest stolicą Polski. <u>Zadanie 2.</u> Dane jest zdanie “2 jest liczbą parzystą i 5 nie jest podzielne przez 3”. a) Oceń wartość logiczną zdania. b) Napisz zaprzeczenie zdania; podaj prawo logiczne z którego skorzystałeś. <u>Zadanie 3.</u> Dana jest forma zdaniowa $(x - \sqrt{3}) = 3$. a) Określ dziedzinę tej formy zdaniowej. b) Jaką liczbę należy wstawić w miejsce	<u>Zadanie 1.</u> Wiadomo, że $w(p \Rightarrow q) = 0$. a) Jaką wartość logiczną ma zdanie $[(\neg p) \vee (q \Leftrightarrow p)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee q]$? b) Napisz zaprzeczenie zdania “Jeśli kupię buty to nie kupię bluzki”. <u>Zadanie 2.</u> Dana jest forma zdaniowa: $(x - 3)(x + 2) = 0$. a) Określ dziedzinę tej formy zdaniowej. b) Podaj zbiór wszystkich elementów spełniających tę formę zdaniową. c) Poprzedź tę formę zdaniową odpowiednim kwantyfikatorem, tak by otrzymać zdanie prawdziwe. d) Napisz negację zdania z podpunktu c).	<u>Zadanie 1.</u> Napisz negację zdania “Pojadę na wieś lub jeśli będzie mi sprzyjać szczęście to polecę do Londynu lub Paryża”. Podaj prawa logiczne, które zastosowałeś. <u>Zadanie 2.</u> Prawdziwe jest zdanie: “*Nieprawda, że jeżeli Platon założył Akademię, to jeśli Arystoteles był uczniem Platona, to Arystoteles nie uczęszczał do Akademii”.* Czy na podstawie tej informacji można wnioskować, że Arystoteles uczęszczał do Akademii? Odpowiedź uzasadnij.

zmiennej, aby otrzymane zdanie było prawdziwe?		

2. Zbiory

Tematyka zajęć:

- Zbiór, element zbioru; działania na zbiorach.
- Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory.
- Działania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Pierwiastki i potęgi.
- Procenty. *Punkty procentowe.*
- Wartość bezwzględna.
- *Błąd przybliżenia. Szacowanie wartości liczbowych*.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna takie pojęcia jak: zbiór pusty, zbiory równe, podzbiór zbioru; – zna symbolikę matematyczną dotyczącą zbiorów ($\in$, $\notin$, $\cup$, $\cap$, —, $\subset$, $\not\subset$); – potrafi podać przykłady zbiorów (w tym przykłady zbiorów skończonych oraz nieskończonych); – potrafi określić relację pomiędzy elementem i zbiorem; – potrafi określać relacje pomiędzy zbiorami	Uczeń: – potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów; – potrafi podać zapis symboliczny np. liczby parzystej, nieparzystej, podzielnej przez daną liczbę całkowitą, wielokrotność danej liczby, liczby, która w wyniku dzielenia przez daną liczbę naturalną daje daną resztę; – potrafi zapisać symbolicznie zbiór na podstawie informacji o jego elementach; – potrafi wymienić elementy zbioru zapisanego symbolicznie;	Uczeń: – potrafi sprawnie działać na wyrażeniach zawierających potęgi i pierwiastki z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności dotyczące własności liczb rzeczywistych; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb całkowitych ujemnych.

(równość zbiorów, zawieranie się zbiorów, rozłączność zbiorów); – zna definicję sumy, iloczynu, różnicy zbiorów; – potrafi wyznaczać sumę, iloczyn i różnicę zbiorów; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych, takich jak zbiór N, C, NW, W; – potrafi rozróżniać liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne; – potrafi wskazać liczby pierwsze i złożone; – zna i potrafi stosować cechy podzielności liczb naturalnych (przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10); – potrafi rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze; – potrafi wyznaczyć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb naturalnych; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb naturalnych; – zna prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych; – potrafi porównywać liczby wymierne; – potrafi przedstawiać liczby wymierne w postaci ułamków zwykłych i dziesiętnych; – potrafi umieścić liczbę wymierną na osi liczbowej; – potrafi usuwać niewymierność z mianownika ułamka stosując wzór skróconego mnożenia (różnicę kwadratów dwóch wyrażeń); – potrafi wyznaczyć przybliżenie dziesiętne liczby rzeczywistej z żądaną dokładnością;	– potrafi zamienić ułamek okresowy na ułamek zwykły; – potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy zbiorami; – potrafi stosować wzory skróconego mnożenia, takie jak: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, w tym podczas usuwania niewymierności z mianownika ułamka; – zna definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej interpretację geometryczną; – potrafi obliczyć wartość bezwzględną liczby; – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu: $\| x - a \| = b$, $\| x - a \| < b$, $\| x - a \| > b$, $\| x - a \| \leq b$, $\| x - a \| \geq b$; – potrafi na podstawie zbioru rozwiązań nierówności, zapisać tę nierówność w postaci nierówności z wartością bezwzględną; – zna pojęcie średniej harmonicznej liczb i potrafi posługiwać się tym pojęciem w rozwiązywaniu zadań (np. obliczenie średniej prędkości jazdy na ustalonej drodze).	

– potrafi sprawnie wykonywać działania w zbiorze liczb rzeczywistych z wykorzystaniem praw działań; – *potrafi wyznaczyć błąd względny i bezwzględny przybliżenia* – *potrafi obliczyć błąd procentowy* – *potrafi szacować wartości wyrażeń* – potrafi sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ i potrafi wykonywać działania na wyrażeniach, które zawierają wymienione wzory skróconego mnożenia; – zna prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych; – potrafi wykonywać działania na potęgach o wykładniku wymiernym; – zna pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej i potrafi stosować prawa działań na pierwiastkach ; *potrafi obliczać pierwiastki stopnia nieparzystego z liczb ujemnych,* – rozumie pojęcie przedziału liczbowego jako podzbioru zbioru liczb rzeczywistych; – potrafi zapisać za pomocą przedziałów zbiory opisane nierównościami; – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej podany przedział liczbowy; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną przedziałów liczbowych;		

<table>
<tr><td>– potrafi obliczyć procent danej liczby, a także wyznaczyć liczbę, gdy dany jest jej procent;
– potrafi obliczyć jakim procentem danej liczby jest druga dana liczba;
– potrafi określić o ile procent dana wielkość jest większa (mniejsza) od innej wielkości;
– potrafi posługiwać się procentem w prostych zadaniach tekstowych;
– rozumie pojęcie punktu procentowego i potrafi się nim posługiwać
– potrafi odczytywać dane w postaci tabel i diagramów, a także przedstawiać dane w postaci diagramów procentowych;
– potrafi przeprowadzać analizę ilościową przedstawionych danych;
– zna pojęcie średniej arytmetycznej i geometrycznej liczb oraz potrafi obliczyć średnią arytmetyczną i geometryczną podanych liczb.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Przykładowe zadania</td></tr>
<tr><td><u>Zadanie 1.</u>
Bartek i Jurek postanowili zmierzyć odległość namiotu od przystani za pomocą swoich kroków. Bartek stawia kroki o długości 48 cm, a Jurek o długości 56 cm. W jakiej odległości od namiotu znajduje się przystań, jeśli ślady stóp chłopców pokryły się 15 razy? Wynik wyraź w metrach.

<u>Zadanie 2.</u></td><td><u>Zadanie 1.</u>
a) Wyznacz zbiory $(A \cap B) - D$, $A \cup B$, $(A - B) - D$, jeśli
$A = \{ x: x \in C \text{ i } x \in \langle -3, 4) \}$,
$B = (-1, 2 \rangle$, $D = \{ x : x \in R \text{ i } |x - 2| = 4\}$.
b) Oceń wartości logiczne zdań :
$N \subset C \Rightarrow R_{-} \cup R_{+} = R$;
$(C - N) \cap W = \varnothing \ \vee \ W - NW = W$.

<u>Zadanie 2.</u></td><td><u>Zadanie 1.</u>
Oblicz wartość wyrażenia:
$\left[\left(4-12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4+12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}$.

<u>Zadanie 2.</u></td></tr>
</table>

a) Znajdź liczbę wymierną, która znajduje się na osi liczbowej między liczbami $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{6}$.

b) Oblicz wartość wyrażenia:

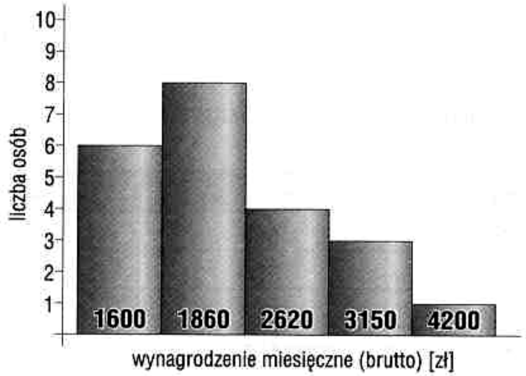
$$8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3^2+4^2} + \left(\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(27^{-\frac{2}{3}}\right) + \sqrt[3]{-64}$$

c) Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}.$$

Zadanie 3.

Poniższy diagram przedstawia wynagrodzenie brutto pracowników pewnej firmy.



Oblicz:

a) Średnie wynagrodzenie brutto w tej firmie.

b) Jaki procent pracowników zarabia więcej niż wynosi średnie wynagrodzenie w tej firmie.

c) Jaki procent najwyższego wynagrodzenia

Usuń niewymierność z mianownika ułamka

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}.$$

Zadanie 3.

a) Oblicz: $|\,2-3\sqrt{3}\,|$.

b) Rozwiąż nierówność: $|\,x+3\,| \geq 4$.

c) Przedział liczbowy $(-5, 7)$ jest zbiorem rozwiązań pewnej nierówności z wartością bezwzględną. Zapisz tę nierówność.

Zadanie 4.

Odległość z miasta A do miasta B samochód osobowy przejechał z prędkością 70 km/h, zaś z powrotem trasę tę pokonał z prędkością 50 km/h. Jaka była średnia prędkość samochodu?

Iloczyn dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 168, a największy ich wspólny dzielnik równa się 24. Znajdź te liczby.

Zadanie 3.

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech dowolnych kolejnych liczb naturalnych wynosi 2.

stanowi wynagrodzenie najniższe. d) O ile procent wynagrodzenie najniższe jest mniejsze od wynagrodzenia najwyższego. Wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku. Zadanie 4. a) Wyznacz zbiory $A \cup B$, $C \cap D$, $A - D$, jeśli: $A = \{ -3, -2, -1, 3, 4 \}$, $B = \{ -2, 0, 1, 3 \}$, $C = \langle -1, 4 \rangle$, $D = (0 , 7 \rangle$ b) Wykonaj działania na zbiorach: $N - C$, $W \cup NW$, $W \cap R$ Zadanie 5. Na zawodach w skokach narciarskich, komentator sportowy ocenił pierwszy skok zawodnika na 122m podczas, gdy skoczek osiągnął długość skoku równą 124,5m. Drugi skok miał długość 123,5m, zaś komentator ocenił go na 126m. W którym przypadku komentator popełnił większy błąd?		

3. Wektory

Tematyka zajęć:

- Wektor w prostokątnym układzie współrzędnych; współrzędne wektora.
- Długość wektora (odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej).

- Wektory równe, wektory przeciwne.
- Działania na wektorach: dodawanie, odejmowanie i mnożenie wektora przez liczbę.
- Własności działań na wektorach.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna określenie wektora i potrafi podać jego cechy; – zna określenie wektorów równych i wektorów przeciwnych oraz potrafi stosować własności tych wektorów w rozwiązywaniu zadań; – potrafi obliczyć współrzędne wektora mając dane współrzędne początku i końca wektora; – potrafi obliczyć współrzędne początku wektora (końca wektora), gdy dane ma współrzędne wektora oraz współrzędne końca (początku) wektora; – potrafi wyznaczyć długość wektora (odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej); – potrafi wykonywać działania na wektorach – dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie przez liczbę (syntetycznie i analitycznie); – potrafi obliczyć współrzędne środka odcinka.	Uczeń: – zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności.	
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Dane są punkty: A(2, 5), B(– 4, 6) a) Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$. b) Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$.	Zadanie 1. Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, punkt D – środkiem boku AB. Wyznacz wektor $\overrightarrow{CD}$ w zależności od wektorów $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{CA}$.	

Zadanie 2. Dany jest wektor $\overrightarrow{AB} = [3, -6]$ oraz współrzędne punktu B (–1, 4) a) Oblicz współrzędne punktu A. b) Wyznacz współrzędne środka odcinka AB. Zadanie 3. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz punkty: A(–3, 5), B(1, –4), C(–3,–1) a) Oblicz współrzędne wektorów: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ oraz długości tych wektorów. b) Narysuj wektory: $\vec{u}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{u}$. Zadanie 4. Prędkość własna motorówki wynosi 12 km/h. Płynąc pod prąd, motorówka pokonuje odległość między przystanią A i przystanią B w czasie 28 minut. Ile minut będzie płynąć motorówka z przystani B do przystani A, jeśli prędkość prądu rzeki wynosi 4 km/h?	Zadanie 2. Dane są wektory: $\vec{a} = [1, -1]$, $\vec{b} = [2, -1]$, $\vec{c} = [-5, -7]$. Wyznacz takie liczby rzeczywiste k i l, aby $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = \vec{c}$. Zadanie 3. Dany jest odcinek o końcach A (2, – 5), B (– 4, 7). Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek AB, że $\frac{\|PB\|}{\|AB\|} = \frac{1}{3}$.	

4. Przekształcenia geometryczne

Tematyka zajęć:

- Pojęcie przekształcenia geometrycznego.
- Przekształcenia izometryczne.
    - Przesunięcie równoległe.

- Symetria osiowa.
- Symetria środkowa.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie przekształcenia geometrycznego i potrafi podać przykłady przekształceń geometrycznych; – zna i rozumie pojęcie przekształcenia izometrycznego; – zna pojęcie przesunięcia równoległego o wektor i potrafi wyznaczyć obraz figury w przesunięciu równoległym o dany wektor; – zna pojęcie symetrii osiowej względem prostej i potrafi wyznaczyć obraz figury w symetrii osiowej względem prostej; – zna pojęcie symetrii środkowej względem punktu i potrafi wyznaczyć obraz figury w symetrii środkowej względem punktu; – potrafi wskazać punkty stałe poznanych przekształceń geometrycznych; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii osiowej względem osi OX oraz osi OY; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii środkowej względem punktu (0,0); – zna i rozumie pojęcia środka symetrii figury; – zna i rozumie pojęcie osi symetrii figury; – potrafi wskazać oś symetrii figury i środek	Uczeń: – potrafi stosować własności przekształceń geometrycznych w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności.	

<table>
<tr><td>symetrii figury, a także potrafi wskazać figury osiowo i środkowo symetryczne;</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Przykładowe zadania</td></tr>
<tr><td><u>Zadanie 1.</u>
Narysuj dowolny trójkąt ABC, a następnie znajdź jego obraz:
a) w symetrii środkowej względem punktu O znajdującego się wewnątrz trójkąta;
b) w symetrii osiowej względem dowolnej prostej, która nie ma z tym trójkątem punktów wspólnych;
c) w przesunięciu równoległym o wektor $\overrightarrow{AC}$.

<u>Zadanie 2.</u>
W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj odcinek AB, gdzie A (–2, 4), B (–5, –3), a następnie wyznacz współrzędne końców tego odcinka:
a) w symetrii względem osi OX;
b) w symetrii względem osi OY;
c) w symetrii względem początku układu współrzędnych;
d) w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [1, -3]$.

<u>Zadanie 3.</u>
Narysuj trójkąt równoboczny i narysuj wszystkie jego osie symetrii. Czy trójkąt równoboczny ma środek symetrii? Narysuj czworokąt, który ma</td><td><u>Zadanie 1.</u>
Prosta m o równaniu $y = 3x + 2$ jest obrazem prostej k o równaniu $y = 3x - 1$ w pewnym przesunięciu równoległym. Podaj przykład wektora przesunięcia.

<u>Zadanie 2.</u>
Dany jest punkt A (–3, 1). Wyznacz współrzędne punktu $A' = S_a(A)$, jeśli a jest prostą o równaniu $y = x$.

<u>Zadanie 4.</u>
a) Uzasadnij, że przekształcenie określone wzorem $P((x, y)) = (-x, y+1)$, gdzie $x, y \in R$, jest izometrią.
b) Wyznacz współrzędne wierzchołków ΔABC w tym przekształceniu, jeśli wiadomo, że A (3, 1), B (– 4, 5), C (4, –2)</td><td></td></tr>
</table>

dwie osie symetrii i środek symetrii.		

5. Funkcja i jej własności

Tematyka zajęć:

- Pojęcie funkcji; pojęcie funkcji liczbowej.
- Sposoby opisywania funkcji.
- Dziedzina funkcji liczbowej.
- Zbiór wartości funkcji liczbowej.
- Wykresy niektórych funkcji liczbowych.
- Miejsce zerowe funkcji liczbowej.
- Monotoniczność funkcji liczbowej.
- Najmniejsza i największa wartość funkcji.
- Inne własności funkcji liczbowych.
- Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić funkcję od innych przyporządkowań; – potrafi podawać przykłady funkcji; – potrafi opisywać funkcje na różne sposoby: wzorem, tabelką, grafem, opisem słownym; – potrafi szkicować wykres funkcji liczbowej określonej słownie, grafem, tabelką, wzorem; – potrafi odróżnić wykres funkcji od krzywej, która	Uczeń: – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków; – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji opisanej wzorem; – potrafi stosować wiadomości o funkcji do opisywania zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym;	Uczeń: – potrafi narysować wykresy takich funkcji jak: y = reszta z dzielenia x przez 3, gdzie $x \in C$, $y = \text{sgn } x$, $y = [x]$, $y = x - [x]$, itp. i omówić ich własności.

wykresem funkcji nie jest; – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć wartość funkcji liczbowej dla danego argumentu, a także obliczyć argument funkcji, gdy dana jest jej wartość; – potrafi określić zbiór wartości funkcji w prostych przypadkach (np. w przypadku, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem skończonym); – potrafi na podstawie wykresu funkcji liczbowej odczytać jej własności, takie jak: a) dziedzina funkcji, b) zbiór wartości funkcji, c) miejsce zerowe funkcji, d) argument funkcji, gdy dana jest wartość funkcji, e) wartość funkcji dla danego argumentu, f) przedziały w których funkcja jest rosnąca, malejąca, stała, g) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodanie, ujemne, niedodatnie, nieujemne, h) najmniejszą oraz największą wartość funkcji; – potrafi narysować wykres funkcji o zadanych podstawowych własnościach; – potrafi interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji lub ich wzorów (np. dotyczące różnych zjawisk przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych);	– potrafi podać opis matematyczny prostej sytuacji w postaci wzoru funkcji; – potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ sporządzić wykresy funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$, $y = f(x - a) + b$ oraz zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku danego przekształcenia; – potrafi na podstawie wykresu funkcji omówić takie jej własności jak: różnowartościowość, parzystość, nieparzystość, okresowość oraz narysować wykres funkcji o tych zadanych własnościach.	

– potrafi przetwarzać informacje dane w postaci wzoru lub wykresu funkcji.		

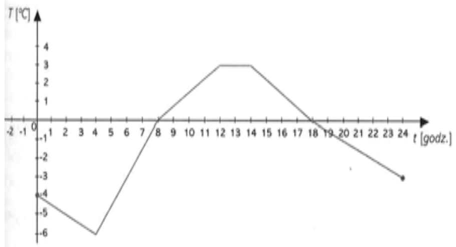
Przykładowe zadania

Zadanie 1.
Dana jest funkcja określona za pomocą opisu słownego: “*Każdej liczbie ze zbioru A= { 0,1, 4, 9, 16} przyporządkowujemy pierwiastek kwadratowy tej liczby*” . Zapisz tę funkcję za pomocą wzoru, a następnie narysuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych. Podaj zbiór wartości tej funkcji i jej miejsce zerowe.

Zadanie 2.
Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{-x}}$.

a) Określ dziedzinę tej funkcji.
b) Czy funkcja ta posiada miejsce zerowe? Odpowiedź uzasadnij.
c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu (–9).

Zadanie 3.
Poniżej podany jest dobowy wykres temperatury.



Odpowiedz na pytania:

a) W jakich godzinach dokonywano pomiaru?
b) W jakim przedziale mieszczą się zanotowane temperatury?
c) W jakich godzinach temperatura wyniosła 0°?

Zadanie 1.
a) Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem

$$f(x) = \sqrt{3-2x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x}.$$

b) Wyznacz miejsce zerowe funkcji o wzorze

$$f(x) = \frac{|x+2|-1}{x^2-1}.$$

Zadanie 2.
Pan Kowalski otrzymuje stałe wynagrodzenie miesięczne oraz dodatkowo wynagrodzenie za nadgodziny. Za każdą godzinę nadliczbową otrzymuje o 50% więcej niż za godzinę etatową. W marcu miał 20 nadgodzin i otrzymał 1690 zł, w kwietniu zaś 16 nadgodzin i otrzymał 1636 zł.

a) Oblicz wysokość stałego wynagrodzenia miesięcznego, stawkę za godzinę etatową oraz stawkę za godzinę nadliczbową.
b) Napisz wzór funkcji opisującej wynagrodzenie miesięczne pana Kowalskiego w zależności od liczby nadgodzin.

Zadanie 3.
Naszkicuj wykres funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -6, 6\rangle$; zbiorem wartości jest przedział $\langle 1, +\infty)$; funkcja jest funkcją parzystą; rośnie w przedziale $\langle -6, 0\rangle$ oraz $f(0) = 4$.

Zadanie 4.

Zadanie 1.
Dana jest funkcja f(x) = reszta z dzielenia x przez 5, gdzie $x \in C$.

a) Narysuj wykres tej funkcji dla $x \in \{ -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
b) Napisz wzór opisujący miejsca zerowe tej funkcji.
c) Podaj zbiór wartości funkcji.
d) Podaj okres podstawowy tej funkcji.

Zadanie 2.
Narysuj wykres funkcji $y = x - [x]$ dla $x \in \langle -3, 4\rangle$ i na podstawie wykresu omów jej własności.
Uwaga! Symbol [x] oznacz największą liczbę całkowitą nie większą od x.

d) W jakich godzinach temperatura była dodatnia, a w jakich ujemna? e) W jakich godzinach temperatura rosła, a w jakich malała? f) Jaką wartość miała temperatura w godzinach $\langle 12, 14\rangle$? g) Jaką najniższą wartość wskazał termograf? <u>Zadanie 4.</u> Odległość d [km], ustalonego kolarza peletonu, od mety w zależności od czasu jazdy t[h] opisuje wzór $d(t) = 180 - 45t$. a) Ile najmniej godzin potrzeba, aby kolarz przekroczył metę wyścigu? b) W jakiej odległości od mety będzie znajdował się kolarz po 40 minutach jazdy? c) Po jakim czasie od startu, kolarz będzie znajdował się 30 km od mety? d) Jaką długość ma etap wyścigu?	W pewnym kraju obowiązuje system podatkowy opisany wzorem: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \le x \le 800 \\ 0{,}05x - 40 & \text{dla } 800 < x \le 2000 \\ 0{,}2x - 340 & \text{dla } x > 2000 \end{cases}$ gdzie x – oznacza wysokość dochodów rocznych podatnika w dolarach, zaś f(x) – oznacza wysokość podatku jaki zobowiązany jest zapłacić podatnik. Oblicz, który z podatników zapłaci większy podatek i o ile procent większy, jeśli dochód roczny pierwszego z nich wyniósł 1260 \$, zaś drugiego 3480 \$.Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.	

6. Funkcja liniowa

Tematyka zajęć:

- Definicja funkcji liniowej.
- Własności funkcji liniowej.
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych.
- Równanie liniowe i nierówność liniowa z jedną niewiadomą.
- Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi (równanie prostej).

- Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Układy nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Zastosowanie funkcji liniowej do opisywania zjawisk z życia codziennego.
- Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem równań i układów równań liniowych.

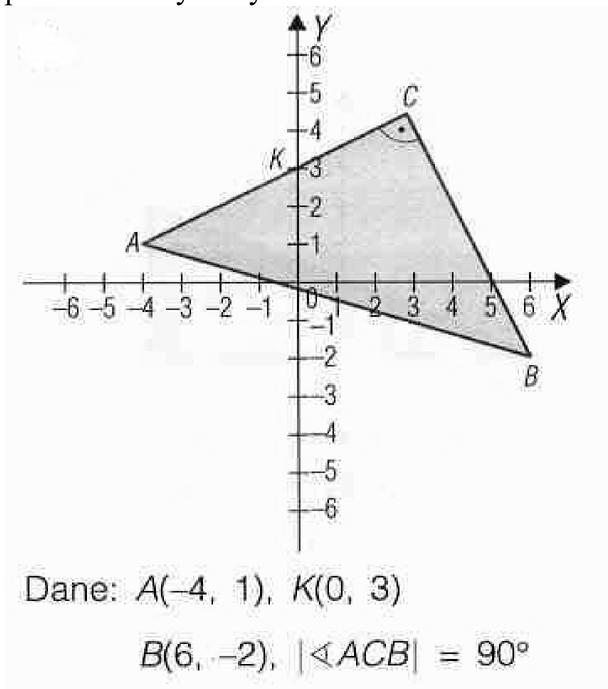
Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie funkcji liniowej; – potrafi interpretować współczynniki we wzorze funkcji liniowej; – potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem; – potrafi na podstawie wykresu funkcji liniowej (wzoru funkcji) określić monotoniczność funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie i graficznie zbiór tych argumentów dla których funkcja liniowa osiąga wartości dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne); – potrafi sprawdzić algebraicznie, czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej; – potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach (np. takiej, której wykres przechodzi przez dwa dane punkty); – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której	Uczeń: – potrafi narysować wykres funkcji kawałkami liniowej i na jego podstawie omówić jej własności; – potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś OY; – potrafi wyznaczyć algebraicznie zbiór tych argumentów dla których funkcja kawałkami liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne); – potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu; – potrafi opisać daną figurę geometryczną w prostokątnym układzie współrzędnych, za pomocą odpowiedniego układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi narysować w prostokątnym układzie współrzędnych figurę geometryczną zapisaną za pomocą układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.	Uczeń: – rozwiązuje zadania nietypowe, o podwyższonym stopniu trudności.

wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi rozwiązać równanie liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi określić liczbę rozwiązań równania liniowego z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązać nierówność liniową z jedną niewiadomą i przedstawić jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej; – potrafi interpretować graficznie równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązać układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać algebraicznie (w tym metodą wyznacznikową) i graficznie układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozpoznać układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny i umie podać ich interpretację geometryczną; – potrafi zbadać wzajemne położenie dwóch prostych na płaszczyźnie; – potrafi rozwiązać zadanie tekstowe prowadzące do równania liniowego z jedną niewiadomą, nierówności liniowej z jedną niewiadomą lub układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu		

<table>
<tr><td>(wzoru), zinterpretować je, przeanalizować i przetworzyć).</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Przykładowe zadania</td></tr>
<tr>
<td>
<u>Zadanie 1.</u>
Napisz wzór funkcji liniowej, wiedząc że, miejscem zerowym funkcji jest liczba 2 i wartość funkcji dla argumentu 8 wynosi –3.

<u>Zadanie 2.</u>
Dana jest funkcja liniowa o wzorze $y = \frac{2}{3}x + 5$.
Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest:
a) równoległy do wykresu danej funkcji i przechodzi przez punkt A(–8, 4);
b) prostopadły do wykresu danej funkcji i przechodzi przez punkt B(9, –2).

<u>Zadanie 3.</u>
W wannie o pojemności 200 litrów znajduje się 20 litrów wody. Po odkręceniu kurków, do wanny napływa 15 litrów wody w ciągu minuty.
a) Po ilu minutach wanna będzie pełna?
b) Napisz wzór funkcji opisującej zależność liczby litrów wody w wannie, po odkręceniu kurków, od czasu w godzinach.
c) Narysuj wykres tej funkcji w prostokątnym układzie współrzędnych.

<u>Zadanie 4.</u>
</td>
<td>
<u>Zadanie 1.</u>
Opisz za pomocą układu nierówności zbiór przedstawiony na rysunku.


<u>Zadanie 2.</u>
Do świetlicy pewnego społecznego liceum, weszli wszyscy uczniowie tej szkoły na uroczystość rozpoczęcia roku szkolnego. Gdyby na każdej ławce usiadło 6 uczniów to zabrakłoby dwóch ławek. Gdyby zaś na każdej ławce usiadło 8
</td>
<td>
<u>Zadanie 1.</u>
Wyznacz funkcję liniową f, która dla każdego $x \in R$ spełnia warunek:
$f(2x - 1) = -6x + 4$.

<u>Zadanie 2.</u>
Funkcję y = sgn (a) (co oznacza znak liczby a), definiujemy następująco:
$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{dla } a \rangle 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ -1 & \text{dla } a \langle 0 \end{cases}$$
Na podstawie powyższej definicji narysuj wykres funkcji:
$f(x) = -2\operatorname{sgn}(-3x + 1) + 5$
</td>
</tr>
</table>

Do marynowania podgrzybków potrzebny jest ocet 6%. Pani Kowalska kupiła 1 litr octu 10%. Ile wody powinna dolać do zakupionego octu, aby otrzymać ocet o żądanym stężeniu do marynowania grzybów?	uczniów to zostałyby 3 ławki. Ilu jest uczniów w tym liceum i ile ławek stoi w świetlicy? <u>Zadanie 3.</u> Dana jest funkcja opisana wzorem: $f(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{dla } x<2 \\ x-3 & \text{dla } 2\le x\le 8 \\ -x+10 & \text{dla } x>8 \end{cases}$ a) Oblicz miejsca zerowe funkcji. b) Oblicz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji przecina oś OY. c) Narysuj wykres funkcji i na podstawie wykresu określ: - przedziały monotoniczności funkcji - zbiór tych argumentów, dla których funkcja osiąga wartości dodatnie.	

7. Funkcja kwadratowa

Tematyka zajęć:

- Jednomian stopnia drugiego.
- Postać ogólna funkcji kwadratowej.
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej; postać iloczynowa funkcji kwadratowej.
- Własności trójmianu kwadratowego.
- Równania i nierówności kwadratowe.
- Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych.
- Zastosowanie wiadomości o funkcji kwadratowej do analizowania zjawisk z życia codziennego.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi rozpoznać jednomian stopnia drugiego; – potrafi narysować wykres jednomianu stopnia drugiego i omówić jego własności; – potrafi odróżnić wzór funkcji kwadratowej od wzoru innej funkcji; – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej lub sprawdzić, że trójmian kwadratowy nie ma miejsc zerowych; – potrafi obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli; – potrafi narysować wykres dowolnej funkcji kwadratowej; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kwadratowej omówić jej własności; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej o zadanych własnościach; – zna postać ogólną, kanoniczną oraz iloczynową funkcji kwadratowej; – potrafi sprawnie zamieniać jedną postać trójmianu kwadratowego na drugą (postać ogólna, kanoniczna, iloczynowa); – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w danym przedziale domkniętym; – potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi graficznie rozwiązywać równania i	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą; – potrafi stworzyć model matematyczny zjawisk z życia codziennego – podać opis zjawiska w postaci wzoru, odczytać informacje z wykresu, interpretować je i przetwarzać; – potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania prostych zadań optymalizacyjnych; – potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowej (symetria względem osi OX, symetria względem osi OY, symetria względem punktu O(0, 0), przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu.	Uczeń; – potrafi wyprowadzić wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego; – potrafi wyprowadzić wzory na współrzędne wierzchołka paraboli; – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać proste zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą; – potrafi przeanalizować zjawisko z życia codziennego, opisane wzorem (wykresem) funkcji kwadratowej.		
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej $y = -2(x-3)(x+2)$, $x \in R$. a) Napisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej oraz ogólnej. b) Narysuj wykres tej funkcji. c) Określ zbiór wartości funkcji, przedziały monotoniczności oraz zbiór tych argumentów dla których funkcja osiąga wartości niedodatnie. Zadanie 2. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 8$, $x \in R$. a) Wyznacz miejsca zerowe funkcji. b) Rozwiąż nierówność $f(x) > -8$. c) Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji na przedziale $\langle 1, 3 \rangle$. Zadanie 3. Napisz wzór funkcji kwadratowej jeśli wiadomo,	Zadanie 1. Firma zajmująca się wynajmem lokali ma do dyspozycji 180 pomieszczeń użytkowych. Wszystkie pomieszczenia są zajęte wówczas, gdy koszt wynajmu lokalu za jeden miesiąc wynosi 1200 zł. Firma oszacowała, że każda kolejna podwyżka czynszu o 40 zł, zmniejsza o 5 liczbę wynajmowanych pomieszczeń. a) Zapisz wzorem przychód firmy w zależności od liczby podwyżek czynszu, z których każda wyniosła 40 zł. b) Jaki miesięczny koszt wynajmu powinna ustalić firma, aby jej przychód był maksymalny? Ile wynosi maksymalny przychód? Zadanie 2. Narysuj wykres funkcji $y = 2x^2$, $x \in R$, a następnie przesuń go o wektor $\vec{u} = [-4, 2]$; otrzymany wykres przekształć przez symetrię względem punktu (0, 0). Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymałeś. Omów własności otrzymanej funkcji.	Zadanie 1. Wiedząc, że liczby całkowite są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 3x^2 + bx + 15$, oblicz b.

że do jej wykresu należy punkt A (1, 3) i dla argumentu 2 funkcja osiąga swą największą wartość równą 4. <u>Zadanie 4.</u> Liczbę osób zwiedzających wystawę n-tego dnia od momentu jej otwarcia opisuje wzór: $W(n) = -4n^2 + 48n - 24$, gdzie $n \in \{1, 2, ...,11\}$. Odpowiedz na pytania: a) W którym dniu wystawę odwiedziło najwięcej osób? b) Ile osób odwiedziło wystawę podczas jej trwania?	<u>Zadanie 3.</u> Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 8, zaś suma kwadratów jej cyfr jest równa 30. Jeśli w liczbie zamienimy cyfry skrajne to otrzymana liczba będzie o 396 większa od początkowej. Znajdź tę liczbę. <u>Zadanie 4.</u> Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx - 3$, $x \in R$. a) Wyznacz b tak, aby najmniejsza wartość funkcji wynosiła (– 4). b) Wyznacz b tak, aby największy zbiór, w którym funkcja jest malejąca był równy przedziałowi $(-\infty, 6\rangle$. c) Wyznacz b tak, aby wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji należał do prostej o równaniu $y = 2x$.	

8. Okrąg w układzie współrzędnych

Tematyka zajęć:

- *Równanie okręgu.*
- *Odległość punktu od prostej.*
- *Wzajemne położenie prostej i okręgu.*
- *Wzajemne położenie dwóch okręgów.*

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – rozpoznaje równanie okręgu w postaci zredukowanej $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ oraz w postaci kanonicznej $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$; – potrafi sprowadzić równanie okręgu z postaci zredukowanej do postaci kanonicznej (i odwrotnie); – potrafi odczytać z równania okręgu współrzędne środka i promień okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu, gdy zna współrzędne środka i promień tego okręgu; – potrafi narysować w układzie współrzędnych okrąg na podstawie danego równania opisującego okrąg; – zna wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi obliczyć odległość punktu od prostej; – potrafi określić wzajemne położenie prostej o danym równaniu względem okręgu o danym równaniu (po wykonaniu stosownych obliczeń); – potrafi określić wzajemne położenie dwóch okręgów danych równaniami (na podstawie stosownych obliczeń); – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu lub stwierdzić, że prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych;	Uczeń: – potrafi napisać równanie okręgu opisanego na trójkącie, gdy dane ma współrzędne wierzchołków trójkąta; – potrafi rozwiązywać proste zadania z wykorzystaniem wiadomości o prostych, trójkątach, parabolach i okręgach.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów w układzie współrzędnych.
Przykładowe zadania		

Zadanie 1. W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj okrąg o danym równaniu: $(x + 3)^2 + y^2 = 16$ Zadanie 2. Wyznacz współrzędne środka i długość promienia okręgu o równaniu $x^2 + y^2 – 2x + 4y = 4$. Zadanie 3. Oblicz współrzędne punktów wspólnych prostej k: $y = \frac{1}{2}x$ i okręgu o równaniu $x^2 + y^2 – 6x = 0$. Zadanie 4. Nie wykonując rysunku, określ: a) wzajemne położenie okręgów o równaniach: $x^2 + y^2 – 4x + 2y + 4 = 0$ oraz $x^2 + y^2 – 8y = 0$. b) wzajemne położenie prostej k: $y = 2x – 3$ względem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4$.	Zadanie 1. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli A(1, 5), B(8, –2), C(9, 1). Zadanie 2. Prosta k: $y = x +1$ przecina parabolę o równaniu $y = – x^2 + 2x + 3$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B. Napisz równanie okręgu o promieniu $r = \sqrt{5}$, którego średnicą jest odcinek AB. Oblicz pole ΔABS, gdzie S jest środkiem okręgu wyznaczonego w punkcie b).	Zadanie 1. Udowodnij, że równanie $x^2 + y^2 – ax + 2by – 0,75a^2 + 2ab = 0$ opisuje okrąg dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b takich, że $a \neq b$. Podaj współrzędne środka i promień okręgu.

9. Wielomiany

Tematyka zajęć:

- Definicja wielomianu stopnia n ($n \in N_+$) jednej zmiennej rzeczywistej.
- Równość wielomianów.
- Działania arytmetyczne na wielomianach.
- Pierwiastek wielomianu, pierwiastek wielokrotny.
- Twierdzenie Bezouta i jego zastosowanie.
- Twierdzenie o reszcie.
- Metody rozkładania wielomianu na czynniki.

- Równania i nierówności wielomianowe.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie jednomianu jednej zmiennej i potrafi określić stopień tego jednomianu; – potrafi wskazać jednomiany podobne; – potrafi rozpoznać wielomian jednej zmiennej rzeczywistej; – potrafi uporządkować wielomian (malejąco lub rosnąco); – potrafi określić stopień wielomianu jednej zmiennej; – potrafi obliczyć wartość wielomianu dla danej wartości zmiennej; – potrafi rozpoznać wielomiany równe; – potrafi rozwiązywać proste zadania, w których wykorzystuje się twierdzenie o równości wielomianów; – potrafi wykonać dodawanie, odejmowanie, mnożenie wielomianów; – potrafi wykonać dzielenie wielomianu przez dwumian; – potrafi sprawdzić czy podana liczba jest pierwiastkiem wielomianu; – potrafi określić krotność pierwiastka wielomianu danego w postaci iloczynowej; – zna twierdzenie Bezouta i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – potrafi obliczyć resztę z dzielenia wielomianu	Uczeń: – potrafi sprawnie dzielić wielomian przez wielomian; – potrafi korzystać z twierdzenia Bezouta przy rozkładaniu wielomianów na czynniki; – potrafi rozkładać wielomian na czynniki korzystając ze wzorów skróconego mnożenia: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$, $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$; – potrafi rozwiązywać równania dwukwadratowe; – zna twierdzenie o reszcie i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć wielomian, który jest resztą z dzielenia wielomianu o danych własnościach przez wielomian stopnia drugiego; – potrafi rozwiązywać proste zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych.	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie Bezouta; – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów wymagające niekonwencjonalnych metod lub pomysłów, a także zadania o podwyższonym stopniu trudności z zastosowaniem poznanej wiedzy.

przez dwumian, nie wykonując dzielenia; – potrafi rozłożyć wielomian na czynniki poprzez wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias, zastosowanie wzorów skróconego mnożenia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, zastosowanie metody grupowania wyrazów; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe, które wymagają umiejętności rozkładania wielomianów na czynniki wymienionych w poprzednim punkcie; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry.		
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. a) Rozłóż wielomian $W(x) = -2x^3 + 8x - x^2 + 4$ na czynniki liniowe. b) Wymień pierwiastki tego wielomianu. c) Rozwiąż nierówność $W(x) < 0$. Zadanie 2. Wyznacz zbiory A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, jeśli $A = \{x: x \in R \text{ i } x^5 - 2x^4 \geq 0\}$ oraz $B = \{x: x \in R \text{ i } (2-x)(4+3x-x^2) < 0\}$. Zadanie 3.	Zadanie 1. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x+3)$ daje resztę 6, a przy dzieleniu przez $(x-2)$ daje resztę 1. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = x^2 + x - 6$. Zadanie 2. Iloczyn trzech kolejnych liczb nieparzystych jest o 65 większy od różnicy kwadratów liczby największej i najmniejszej. Znajdź te liczby. Zadanie 3. Dla jakich m reszta z dzielenia wielomianu	Zadanie 1. Rozłóż na czynniki wyrażenie $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$. Zadanie 2. Rozłóż na czynniki, możliwie najniższego stopnia, wielomian $W(x) = x^4 + 1$.

Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + kx$. a) Wyznacz k tak, aby pierwiastkiem tego wielomianu była liczba 1. b) Dla wyznaczonej wartości k wyznacz pozostałe miejsca zerowe tego wielomianu. <u>Zadanie 4.</u> Dane są wielomiany $W(x) = (ax^2 + bx + 3)(x + 1)$, $H(x) = 3x^3 + 7x^2 + 7x + 3$. Wyznacz a oraz b tak, aby wielomiany W(x) oraz H(x) były równe.	$W(x) = m^2x^6 - 8x^3 + 5m$ przez dwumian $(x + 1)$ jest mniejsza od 2? <u>Zadanie 4.</u> a) Rozwiąż równanie $2x^4 - x^2 - 1 = 0$. b) Rozłóż na czynniki, możliwie najniższego stopnia, wielomian $W(x) = (x^3 + 8)(3x^3 - 81)$.	

10. Funkcje wymierne

Tematyka zajęć:

- Definicja funkcji wymiernej; dziedzina funkcji wymiernej.
- Działania na wyrażeniach wymiernych.
- Funkcja homograficzna i jej własności.
- Równania i nierówności wymierne.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi na podstawie wzoru odróżnić funkcję wymierną od innej funkcji; – potrafi określić dziedzinę funkcji wymiernej (wyrażenia wymiernego); – potrafi napisać wzór funkcji wymiernej o zadanej dziedzinie; – potrafi wykonywać działania na wyrażeniach	Uczeń: – zna definicję funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$; – potrafi odróżnić funkcję homograficzną od innej funkcji wymiernej; – potrafi przekształcić wzór funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$,	

wymiernych, takie jak: skracanie wyrażeń wymiernych, rozszerzanie wyrażeń wymiernych, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych (tylko proste przykłady); – potrafi narysować wykres proporcjonalności odwrotnej $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \in R - \{0\}$, $x \in R - \{0\}$; – potrafi opisać własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \in R - \{0\}$, $x \in R - \{0\}$; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności wymierne związane z proporcjonalnością odwrotną; – potrafi rozwiązywać proste zadania tekstowe z zastosowaniem wiadomości o proporcjonalności odwrotnej.	gdzie $x \neq -c$ tak, by znany był wzór proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$ i współrzędne wektora przesunięcia równoległego; – potrafi narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$; – potrafi opisać własności funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$, na podstawie jej wykresu; – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji homograficznej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś OY; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji homograficznej; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności związane z funkcją homograficzną; – potrafi przekształcić wykres funkcji homograficznej w symetrii względem osi OX, symetrii względem osi OY, symetrii względem punktu (0, 0), w przesunięciu równoległym o dany wektor oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku tego przekształcenia; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wymiernych.	

Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> a) Wyznacz te wartości x, dla których podane wyrażenia wymierne mają sens liczbowy: $\frac{x+2}{x-3}$, $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$, $\frac{x}{x^3-4x^2+2x-8}$ b) Podaj przykład funkcji wymiernej, której dziedziną jest zbiór R – { 2, 3, 7 }. <u>Zadanie 2.</u> a) Skróć wyrażenia wymierne: $\frac{2x^4-4x^2}{8x^2}$, $\frac{(2x-1)(x+4)}{4x^2-1}$; podaj konieczne założenia. b) Wykonaj dodawanie oraz odejmowanie wyrażeń wymiernych: $\frac{x}{x-2}+\frac{2x+3}{x+4}$, $\frac{x-5}{2x+3}-\frac{3}{4x^2-9}$; podaj konieczne założenia. c) Wykonaj mnożenie oraz dzielenie wyrażeń wymiernych: $\frac{x^2-4}{2x^2-x}\cdot\frac{2x-1}{5x+10}$, $\frac{x^2+4x+4}{x^2-16}:\frac{x+2}{2x-8}$; podaj konieczne założenia. <u>Zadanie 3.</u>	<u>Zadanie 1.</u> Wykres funkcji homograficznej o wzorze $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$ otrzymamy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu proporcjonalności odwrotnej $y=\frac{a}{x}$ o pewien wektor. a) Wyznacz wzór proporcjonalności odwrotnej oraz współrzędne wektora przesunięcia. b) Oblicz miejsce zerowe funkcji oraz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji przecina oś OY. c) Narysuj wykres funkcji. d) Podaj przedziały monotoniczności funkcji. <u>Zadanie 2.</u> Dwie sekretarki wykonały pewną pracę w ciągu 12 godzin. Gdyby pierwsza wykonała sama połowę pracy, a następnie druga resztę, to zużyłaby na to 25 godzin. W ciągu ilu godzin każda z sekretarek, pracując oddzielnie, może wykonać tę pracę? <u>Zadanie 3.</u> Rozwiąż równanie i nierówność: a) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x}{x-2}=\frac{10}{x^2+x-6}$	

Dana jest funkcja o wzorze $y = \frac{2}{x}$, gdzie $x \in R - \{0\}$. a) Narysuj wykres tej funkcji i na jego podstawie omów jej własności. b) Rozwiąż nierówność $\frac{2}{x} \le 3$. <u>Zadanie 4.</u> Rozwiąż równanie $\frac{2x-3}{x+5} = \frac{x-5}{x+2}$. <u>Zadanie 5.</u> Promień dużego koła bicyklu ma długość 54 cm, a promień małego kółka – 20 cm. Oblicz, ile obrotów wykonało małe kółko, jeśli w tym samym czasie duże koło obróciło się 50 razy. Jaką odległość pokonał wtedy bicykl?	b) $\frac{1+x}{1+2x} \le \frac{1-2x}{x+1} - 1$.	

11. Ciągi

Tematyka zajęć:

- Definicja ciągu; ciąg liczbowy.
- Sposoby opisywania ciągów.
- Ciągi monotoniczne.
- Ciąg arytmetyczny.
- Ciąg geometryczny.
- Oprocentowanie lokat i kredytów (procent prosty i składany).

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna definicję ciągu (ciągu liczbowego); – potrafi wyznaczyć dowolny wyraz ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi narysować wykres ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi podać własności ciągu liczbowego na podstawie jego wykresu; – zna definicję ciągu arytmetycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – zna definicję ciągu geometrycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; – potrafi wyznaczyć pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego na podstawie informacji o innych wyrazach ciągu; – potrafi znaleźć wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego; – potrafi wyznaczyć pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego na podstawie informacji o wartościach innych wyrazów ciągu;	Uczeń: – potrafi sprawdzić, które wyrazy ciągu należą do danego przedziału; – potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność ciągu określonego wzorem ogólnym; – potrafi zbadać na podstawie definicji czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest arytmetyczny; – potrafi zbadać na podstawie definicji czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest geometryczny; – potrafi wykorzystać średnią arytmetyczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu arytmetycznego; – potrafi wykorzystać średnią geometryczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu geometrycznego; – potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące ciągu arytmetycznego lub ciągu geometrycznego, które wymagają rozwiązania układów równań o podwyższonym stopniu trudności; – potrafi rozwiązywać zadania mieszane dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego.	Uczeń: – uczeń potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące ciągów i ich własności; – potrafi udowodnić wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – potrafi udowodnić wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

– potrafi znaleźć wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego; – potrafi rozwiązywać zadania z życia codziennego dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego; – potrafi stosować procent prosty i składany w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów.		
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 4 - \frac{2}{n}$. a) Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu. b) Narysuj wykres tego ciągu. c) Czy ciąg jest ciągiem rosnącym? Odpowiedź uzasadnij. d) Zbadaj, czy istnieje taki wyraz ciągu, który jest równy $\frac{15}{4}$. Zadanie 2. Maszynistka miała do przepisania książkę, liczącą 586 stron. Przez pierwsze 3 dni przepisywała po 14 stron dziennie. Aby jednak przyspieszyć przepisywanie całości, postanowiła, że czwartego dnia przepisze o 2 strony więcej niż trzeciego i każdego następnego dnia przepisze o 2 strony więcej niż poprzedniego. W ciągu ilu dni przepisała całą książkę?	Zadanie 1. Dla jakich x liczby $2x^3 + 9x$, $x^2 + x$, $-3x - 4$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n)? Dla znalezionej wartości x napisz wzór ogólny ciągu (a_n) i zbadaj na podstawie definicji jego monotoniczność. Zadanie 2. Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny, zapłacono 61 zł. Za pierwszą i drugą razem zapłacono o 11 zł więcej niż za trzecią. Ile zapłacono za trzecią książkę? Zadanie 3. Trzy liczby, których suma wynosi 15, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli do pierwszej z nich dodamy 2, do drugiej 3, a do trzeciej 8, to otrzymane liczby utworzą ciąg geometryczny. Znajdź te liczby. Zadanie 4.	Zadanie 1. Udowodnij, że trzy liczby a, b, c tworzące ciąg geometryczny spełniają warunek: $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$. Zadanie 2. Wykaż, że jeśli S_n, S_{2n}, S_{3n} oznaczają odpowiednio sumę n, 2n, 3n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), to $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

<u>Zadanie 3.</u> Piłka odbijając się od ziemi, osiągnęła za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{2}{3}$ poprzedniej. Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po szóstym odbiła się na wysokość 32 cm? <u>Zadanie 4.</u> Pan X umówił się z panem Y, że będzie mu wypłacał codziennie przez trzy tygodnie pieniądze, przy czym pierwszego dnia 10 zł, drugiego 20 zł, trzeciego 30 zł, czwartego 40 zł itd. W zamian pan Y wypłaci mu pierwszego dnia 1 grosz, drugiego 2 grosze, trzeciego 4 grosze, czwartego 8 groszy itd. Który z panów zyska na tej umowie i ile? <u>Zadanie 5.</u> Pan Kowalczyk złożył do banku 2500 zł na cztery lata na procent składany. Jaką kwotę będzie miał na koncie po tym okresie, jeśli oprocentowanie w banku wynosi 10% w skali roku, a odsetki kapitalizuje się co 6 miesięcy?	Rozwiąż równanie: $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + ...+ (x + 28) = 155$.	

12. Trygonometria

Tematyka zajęć:

- Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
- Miara łukowa kąta.

- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne.
- Wykresy funkcji trygonometrycznych.
- Równania i nierówności trygonometryczne.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków; – potrafi znaleźć w tablicach kąt o danej wartości funkcji trygonometrycznej; – potrafi odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta; – zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$; – potrafi dowodzić proste tożsamości trygonometryczne;	Uczeń: – zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta; – potrafi określić znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych; – potrafi konstruować kąty w układzie współrzędnych w oparciu o wartości funkcji trygonometrycznych; – potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich; – potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne; – potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych i na ich podstawie określać własności funkcji trygonometrycznych; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne na podstawie wykresów funkcji trygonometrycznych; – potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych (symetria względem osi OX, symetria względem osi OY, symetria względem punktu O(0, 0), przesunięcie	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.

– potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym; – potrafi stosować miarę łukową i stopniową kąta (zamieniać stopnie na radiany i odwrotnie).	równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu.	
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. a) Oblicz wartość wyrażenia: $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$. b) Zamień na stopnie: $\frac{2}{3}\pi$ rad, 5π rad. c) Zamień na radiany: 150°, 36°. Zadanie 2. W trójkącie prostokątnym ABC dane są: długość przeciwprostokątnej $\lvert BC\rvert = \sqrt{146}$ cm oraz długość przyprostokątnej $\lvert AB\rvert = 5$ cm. a) Oblicz długość drugiej przyprostokątnej. b) Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych). c) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną. Zadanie 3.	Zadanie 1. a) Zbuduj kąt o mierze α takiej, że $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. b) Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. Zadanie 2. Wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$. Zadanie 3. Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji trygonometrycznych: a) Rozwiąż równanie $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{2} < \sin\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, jeśli $\alpha \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$.	Zadanie 1. Wykaż, że równanie $\sin x = 2\sin 48^\circ \cdot \cos 42^\circ$ nie ma rozwiązań.

Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma wieża? <u>Zadanie 4.</u> Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. <u>Zadanie 5.</u> Sprawdź, czy równość $\frac{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną.	<u>Zadanie 4.</u> Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się on na wysokości h metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie t sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością v wznosi się balon?	

13. Podstawowe własności figur geometrycznych na płaszczyźnie, cz.1

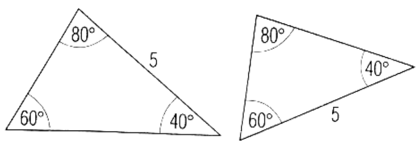
Tematyka zajęć:

- Punkty, proste, półproste, odcinki, figury wypukłe, figury wklęsłe.
- Pojęcie odległości.
- Figury ograniczone, figury nieograniczone.
- Kąty.
- Położenie prostych na płaszczyźnie.
- Łamana, wielokąt.
- Trójkąty – podział, własności.
- Środkowe trójkąta.
- Przystawanie trójkątów.

- Zależności między bokami i kątami w trójkącie.
- Nierówność trójkąta.
- Twierdzenie o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.
- Suma kątów w trójkącie.
- Symetralne boków w trójkącie.
- Dwusieczne kątów w trójkącie.
- Wysokości w trójkącie.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna figury podstawowe (punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń) i potrafi zapisać relacje między nimi; – zna pojęcie figury wypukłej i wklęsłej; potrafi podać przykłady takich figur; – zna pojecie figury ograniczonej i figury nieograniczonej, potrafi podać przykłady takich figur; – rozumie pojęcie odległości, umie wyznaczyć odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych; – zna określenie kąta i podział kątów ze względu na ich miarę; – zna pojęcie kątów przyległych i kątów wierzchołkowych oraz potrafi zastosować własności tych kątów w rozwiązaniu prostych zadań; – umie określić położenie prostych na płaszczyźnie;	Uczeń: – zna twierdzenia o zależnościach między kątami i bokami w trójkącie; – zna pojęcie kąta zewnętrznego wielokąta, umie uzasadnić, że suma kątów zewnętrznych w wielokącie jest stała; – zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym poprowadzonej na przeciwprostokątną; – potrafi udowodnić twierdzenie o części wspólnej figur wypukłych; – potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych; – potrafi udowodnić twierdzenie o liczbie przekątnych w wielokącie; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie; – potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka;	Uczeń: – zna i rozumie aksjomatyczną definicję odległości. Zna przykłady metryk nieeuklidesowych; – potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenia mówiące o zależnościach między kątami i bokami w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenia o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą; – potrafi udowodnić twierdzenie o wysokościach w trójkącie; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i trójkątów, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń.

– zna pojęcie dwusiecznej kąta i symetralnej odcinka, potrafi zastosować własność dwusiecznej oraz symetralne odcinka w rozwiązaniu prostych zadań, a także skonstruować dwusieczną danego kąta i symetralną danego odcinka; – zna określenie łamanej, umie stwierdzić, czy dana figura zbudowana z odcinków jest łamaną; – zna określenie wielokąta i przekątnej wielokąta, umie zastosować wzór na liczbę przekątnych wielokąta; – zna pojęcie wielokąta foremnego i potrafi rozróżnić takie wielokąty; – zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty; – zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenia: o środkowych w trójkącie, o odcinku łączącym środki dwóch boków w trójkącie i o sumie kątów w trójkącie oraz potrafi zastosować te twierdzenia w rozwiązaniu prostych zadań; – zna pojęcie środka ciężkości trójkąta; – zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie; – zna twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – zna trzy cechy przystawania trójkątów i potrafi je zastosować w rozwiązaniu prostych zadań.	– potrafi udowodnić twierdzenie o sumie kątów w trójkącie (wielokącie); – potrafi udowodnić twierdzenia o symetralnych boków i dwusiecznych kątów w trójkącie; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i trójkątów, z zastosowaniem poznanych twierdzeń.	
Przykładowe zadania		
Zadanie 1.	Zadanie 1.	Zadanie 1.

Punkt C dzieli odcinek AB długości 24 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy 6 : 2. Jaka jest długość każdego z odcinków? <u>Zadanie 2.</u> Różnica miar dwóch kątów przyległych wynosi 21°. Oblicz miary tych kątów. <u>Zadanie 3.</u> Na płaszczyźnie dane są punkty: A, B, P, Q przy czym $A \neq B$, $\|AP\| = \sqrt{12}$ cm, $\|BP\| = 3\sqrt{2}$ cm, $\|AQ\| = \frac{49}{9}$ cm, $\|BQ\| = 5{,}(4)$ cm. Sprawdź, czy punkty P, Q należą do symetralnej odcinka AB. Z jakiej własności symetralnej skorzystasz? <u>Zadanie 4.</u> Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu mierzonej w calach (1 cal = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala. <u>Zadanie 5.</u> Czy poniższe trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij. 	Długości odcinków AB, AC, BC, BD i CD spełniają warunki: $\|AB\| = \|AC\| + \|BC\|$ oraz $\|BC\| + \|BD\| = \|CD\|$. Uzasadnij, że punkty A, B, C, D leżą na jednej prostej. <u>Zadanie 2.</u> Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną. <u>Zadanie 3.</u> Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i obrano na przedłużeniach punkty D i E tak, że $\|AD\| = \|AC\|$ oraz $\|BE\| = \|BC\|$. Oblicz miarę kąta DCE.	W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta ma długość a. Jaką długość ma wysokość opuszczona na podstawę? <u>Zadanie 2.</u> Niech a, b, c będą długościami boków w dowolnym trójkącie. Uzasadnij, że prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

14. Podstawowe własności figur geometrycznych na płaszczyźnie, cz.2

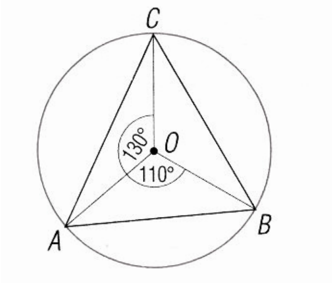
Tematyka zajęć:

- Koło i okrąg.
- Wzajemne położenie prostej i okręgu.
- Wzajemne położenie dwóch okręgów.
- Kąty w kole (kąty wpisane, kąty środkowe).
- Kąt dopisany do okręgu.
- Czworokąty.
  - Trapezy.
  - Równoległoboki.
  - Trapezoidy.
- Wielokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu.
- Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu.
- Czworokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna definicję koła i okręgu, poprawnie posługuje się terminami: promień, średnica, łuk, środek okręgu; – potrafi określić wzajemne położenie prostej i	Uczeń: – umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych; – wie co to jest kąt dopisany do okręgu, wie, że miara tego kąta jest równa mierze kąta wpisanego	Uczeń: – umie udowodnić twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych; – umie udowodnić twierdzenie o kącie dopisanym do okręgu;

okręgu; – zna określenie stycznej do okręgu; potrafi skonstruować styczną do okręgu, przechodzącą przez punkt leżący w odległości większej od środka okręgu niż długość promienia okręgu; potrafi skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu; – zna twierdzenie o stycznej do okręgu i potrafi je wykorzystać w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinkach stycznych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – umie określić wzajemne położenie dwóch okręgów; – posługuje się terminami: kąt wpisany w koło, kąt środkowy koła; zna twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna podział czworokątów; – potrafi wyróżnić wśród trapezów: trapezy prostokątne i trapezy równoramienne; poprawnie posługuje się takimi określeniami jak: podstawa, ramię, wysokość trapezu; – wie, że suma kątów przy każdym ramieniu trapezu jest równa 180° i umie tę własność wykorzystać w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności trapezów, w tym również z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; – zna podstawowe własności równoległoboków i	w okrąg opartego na tym samym łuku; – umie na podstawie własności czworokąta podanych w zadaniu wywnioskować, jaki to jest czworokąt; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń; – umie udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i opisanych na trójkącie; – potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie w rozwiązaniu złożonych zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązania zadań o średnim stopniu trudności dotyczących trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.	– umie udowodnić twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów, czworokątów, wielokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń.

umie je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – wie, jakie własności ma romb; – zna własności prostokąta i kwadratu; – wie, co to są trapezoidy, potrafi podać przykłady takich figur; – wie, czym charakteryzuje się deltoid; – rozumie co to znaczy, że wielokąt jest wpisany w okrąg, wielokąt jest opisany na okręgu; – potrafi konstrukcyjnie wpisać okrąg w dowolny trójkąt; – potrafi konstrukcyjnie opisać okrąg na dowolnym trójkącie; – wie, gdzie znajduje się środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące trójkątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; – zna warunki jakie spełniać musi czworokąt, aby można było okrąg wpisać w czworokąt oraz aby można było okrąg opisać na czworokącie; potrafi zastosować te warunki w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi wymienić nazwy czworokątów, w które można wpisać i nazwy czworokątów na których można opisać okrąg; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych własności trapezu.		

Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu wynosi 146°. Oblicz miarę kąta, który tworzą styczne poprowadzone przez końce tych promieni. Zadanie 2. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.  Zadanie 3. Różnica miar kątów przeciwległych trapezu równoramiennego wynosi 20°. Oblicz miary kątów trapezu. Zadanie 4. Z kawałka materiału w kształcie trapezu prostokątnego o podstawach długości 1,2 m i 0,4 m oraz wysokości 1,5 m wycięto chorągiewkę w kształcie trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest dłuższe ramię trapezu, a jeden z wierzchołków należy do krótszego ramienia trapezu. a) Wyznacz długości odcinków, na jakie ten	Zadanie 1. Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce A i B średnicy AB tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i 15 cm. Oblicz długość średnicy AB. Zadanie 2. Uzasadnij, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw. Zadanie 3. W czworokącie ABCD połączono środki boków i otrzymano prostokąt. Czy można twierdzić, że ABCD jest rombem? Odpowiedź uzasadnij. Zadanie 4. W trapez ABCD, AB || CD, wpisano okrąg o środku O. Uzasadnij, że $\lvert\angle BOC\rvert = 90°$.	Zadanie 1. W czworokącie wpisanym w okrąg prowadzimy dwusieczne dwóch przeciwległych kątów, przecinające okrąg w punktach E, F. Wykaż, że odcinek EF jest średnicą tego okręgu. Zadanie 2. Udowodnij, że w dowolnym czworokącie odcinki łączące środki przeciwległych boków dzielą się w punkcie przecięcia na połowy.

wierzchołek podzielił krótsze ramię trapezu. b) Oblicz długości boków chorągiewki. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01 m. <u>Zadanie 5.</u> Oblicz miary kątów czworokąta ABCD wpisanego w okrąg, wiedząc, że $\lvert\angle C\rvert = 4\lvert\angle A\rvert$ i $\lvert\angle B\rvert = 2\lvert\angle D\rvert$.		

15. Pola figur

Tematyka zajęć:

- Pole figury geometrycznej.
- Pole trójkąta.
- Pole czworokąta.
    - Pole równoległoboku.
    - Pole rombu.
    - Pole trapezu.
- Pole koła.
- Pole wycinka koła.
- Długość okręgu, długość łuku okręgu.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – rozumie pojęcie pola figury; – zna następujące wzory na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$, $P = \frac{abc}{4R}$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$,	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzory na pole trójkąta; – potrafi wyprowadzić wzór na pole równoległoboku; – potrafi wyprowadzić wzory na pole rombu;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola

$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia; – Potrafi zastosować wzory na pole kwadratu i prostokąta w rozwiązaniach prostych zadań; – zna wzory na pole równoległoboku; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące równoległoboków, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi obliczyć wysokość trójkąta i równoległoboku korzystając ze wzoru na pole; – zna wzory na pole rombu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące rombów, wykorzystując wzory na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – zna wzór na pole trapezu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trapezów, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące wielokątów (trójkątów, czworokątów) wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenia dotyczącego wpisywalności okręgu w czworokąt i twierdzenia dotyczącego opisywalności okręgu na czworokącie; – zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie	– potrafi wyprowadzić wzór na pole trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów i czworokątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej twierdzeń.	figur i innych twierdzeń.

zastosować te wzory w rozwiązaniach prostych zadań; – zna wzór na długość okręgu i długość łuku okręgu; umie zastosować te wzory w rozwiązaniach prostych zadań.		
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu 504 cm^2 wycięto koło, styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła. Zadanie 2. Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz: a) pole trójkąta; b) długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; c) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Zadanie 3. W trójkącie, którego pole jest równe 27 cm^2, dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. Jaką miarę ma kąt zawarty między tymi bokami? Zadanie 4. Na okręgu o promieniu 3 cm opisano trapez, którego kąty przy dłuższej podstawie mają miary	Zadanie 1. Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne długości 13 cm i 8 cm przecinają się pod kątem 60°. Zadanie 2. Przekątne rombu mają długość 10 cm i 24 cm. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu i na tej podstawie ustal, czy kąt ostry rombu ma miarę większą od 45°, czy mniejszą. Zadanie 3. Na okręgu, którego długość promienia wynosi 2 cm, opisano trapez równoramienny o polu 20 cm^2. Oblicz długości boków trapezu. Zadanie 4. Romb o boku długości 18 cm podzielono na trzy części o równych polach prostymi przechodzącymi przez wierzchołek kąta ostrego. Oblicz długości odcinków, na jakie te proste podzieliły boki rombu.	Zadanie 1. Trójkąt ABC ma pole równe S. Utworzono nowy trójkąt $A'B'C'$ w taki sposób, że $A' = S_B(A)$, $B' = S_C(B)$ i $C' = S_A(C)$. Oblicz pole trójkąta $A'B'C'$. Zadanie 2. W trójkącie poprowadzono środkowe, które podzieliły dany trójkąt na sześć mniejszych trójkątów. Wykaż, że pola powstałych trójkątów są równe.

30° i 60°. Oblicz pole trapezu. <u>Zadanie 5.</u> Kąt wpisany w koło ma miarę 45° i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten sam łuk.		

16. Twierdzenie Talesa

Tematyka zajęć:

- Twierdzenie Talesa.
- Wnioski z twierdzenia Talesa.
- Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna twierdzenie Talesa ; potrafi je stosować do podziału odcinka w danym stosunku, do konstrukcji odcinka o danej długości, do wyznaczania długości odcinka; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i potrafi je stosować do uzasadnienia równoległości odpowiednich odcinków lub prostych; – zna wnioski z twierdzenia Talesa i potrafi je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania	Uczeń: – umie udowodnić twierdzenie Talesa, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności z zastosowaniem twierdzenia Talesa, twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, oraz innych twierdzeń.	

<table>
<tr><td>geometryczne wykorzystując: twierdzenie Talesa, wnioski z niego wypływające, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Przykładowe zadania</td></tr>
<tr><td><u>Zadanie 1</u>.
Dany jest odcinek długości a. Podziel ten odcinek w stosunku:
a) $2 : 3$, b) $1 : \sqrt{2}$.

<u>Zadanie 2.</u>
Dane są odcinki długości a, b oraz c. Skonstruuj odcinek długości;
a) $\frac{2ab}{3c}$, b) $\frac{\sqrt{3}ac}{\sqrt{2}b}$.

<u>Zadanie 3.</u>
W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt D dzieli bok AB na takie dwa odcinki, że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC, która przecięła bok BC w punkcie E. Oblicz długości odcinków: CE, BE i DE.

<u>Zadanie 4.</u></td><td><u>Zadanie 1.</u>
Dany jest odcinek długości a. Podziel ten odcinek w stosunku $\sqrt{5} : \sqrt{7}$.

<u>Zadanie 2.</u>
Dane są odcinki długości a, b, c ($a > \sqrt{3}b$).
Skonstruuj odcinek długości $\frac{b}{c}\sqrt{a^2 - 3b^2}$.
<u>Zadanie 3.</u>
W równoległobok o przekątnych długości 22 cm i 18 cm wpisano romb tak, że jego boki są równoległe do przekątnych równoległoboku. Oblicz długość boku rombu.</td><td></td></tr>
</table>

W trapezie ABCD, AB || CD, mamy dane: |AB| = 12 cm, |CD| = 7 cm, |AD| = 8 cm. O ile należy wydłużyć ramię AD, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC?		

17. Jednokładność i podobieństwo

Tematyka zajęć:

- Jednokładność.
- Konstruowanie obrazów figur w jednokładności.
- Podobieństwo.
- Cechy podobieństwa trójkątów.
- Pola figur podobnych.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna i rozumie definicję podobieństwa; – potrafi podać przykłady figur podobnych; – zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować w rozwiązaniach prostych zadań geometrycznych, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń; – zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować w rozwiązaniach prostych zadań, w tym również dotyczących planu i mapy.	Uczeń: – zna i rozumie definicję jednokładności; – potrafi znaleźć obraz punktu, odcinka, prostej, kąta, wielokąta, koła w jednokładności o danym środku i danej skali; – wie, jakim przekształceniem jest jednokładność o skali $s = 1$i skali $s = -1$; – potrafi scharakteryzować jednokładność w zależności od skali s; – potrafi zastosować jednokładność w rozwiązaniach zadań dotyczących wpisywania jednych figur w drugie; – potrafi, na płaszczyźnie z układem	Uczeń: – potrafi udowodnić wybrane własności jednokładności; – potrafi, na płaszczyźnie z układem współrzędnych, znaleźć obraz figury w jednokładności o środku O(a, b) i skali $s \neq 0$; – umie udowodnić twierdzenie o wysokości w trójkącie prostokątnym poprowadzonej na przeciwprostokątną, wykorzystując podobieństwo trójkątów; – potrafi rozwiązywać nietypowe

	współrzędnych, znaleźć obraz figury w jednokładności o środku O(0, 0) i skali $s \neq 0$; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące jednokładności; – wie, jaki jest związek między jednokładnością a podobieństwem; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu, wykorzystując cechy podobieństwa trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych i inne , poznane wcześniej twierdzenia.	zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem własności jednokładności i podobieństwa i innych twierdzeń.
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij. a) Dowolne dwa kwadraty są podobne. b) Dowolne dwa romby są podobne. c) Dowolne dwa prostokąty są podobne. d) Dowolne dwa okręgi są podobne. Zadanie 2. Trójkąt równoboczny jest podobny do trójkąta ABC w skali s = 3. Pole trójkąta ABC jest równe $4\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz pole trójkąta $A'B'C'$. Zadanie 3. Podstawy trapezu mają długość 12 cm i 20 cm, a wysokość 48 cm. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych od podstaw trapezu.	Zadanie 1. Na płaszczyźnie dane są dwa punkty A i A'. Znajdź taki punkt O, aby $A' = J_O^{-2}(A)$. Zadanie 2. Znajdź obraz prostej, będącej wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}x - 3$ w jednokładności o skali $s = \frac{1}{3}$ i środku w punkcie O(0, 0). Zadanie 3. Na płaszczyźnie dany jest ostrokątny trójkąt różnoboczny ABC. Wpisz w ten trójkąt kwadrat KLMN tak, aby $K, L \in AB$, $M \in BC$, $N \in AC$. Zadanie 4. Na okręgu zaznaczono kolejno punkty A, B, C, D i	Zadanie 1. Niech ABCD będzie dowolnym czworokątem wypukłym. Utworzono czworokąt EFGH łącząc kolejne środki boków czworokąta ABCD. Wykaż, że powstały czworokąt jest równoległobokiem i jego pole jest połową pola czworokąta ABCD.

Zadanie 4. W trójkącie równoramiennym podstawa ma 16 cm długości, a ramię – 17 cm długości. Oblicz odległość środka wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta od ramienia trójkąta. Zadanie 5. Powierzchnia lasu na mapie zajmuje 200 cm^2. Jaka jest powierzchnia tego lasu w hektarach, jeśli skala mapy wynosi 1 : 25000.	narysowano dwie cięciwy AC i BD, które przecięły się w punkcie P. Wiedząc, że |AC| = 24 cm, |PD| = 6 cm, |PB| = 12 cm, oblicz |AP| i |PC|. Zadanie 5. W trapezie podstawy mają długość 8 cm i 10 cm. Oblicz długość odcinka, o końcach należących do ramion trapezu, równoległego do podstaw, przechodzącego przez punkt przecięcia przekątnych.	

18. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

Tematyka zajęć:

- *Funkcja wykładnicza i jej własności.*
- *Definicja logarytmu liczby dodatniej.*
- *Własności logarytmów.*
- *Funkcja logarytmiczna i jej własności.*

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna definicję funkcji wykładniczej; – potrafi odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji; – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych; – potrafi opisać własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu;	Uczeń: – potrafi przekształcać wykresy funkcji wykładniczych (S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,0)}$), przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi rozwiązywać graficznie proste równania oraz nierówności z wykorzystaniem wykresu funkcji wykładniczej – potrafi przekształcać wykresy funkcji	– potrafi dowodzić własności logarytmów; – zna i potrafi stosować wzór na zamianę podstawy logarytmu

– potrafi obliczyć logarytm liczby dodatniej; – zna i potrafi stosować własności logarytmów: logarytm iloczynu, logarytm ilorazu, logarytm potęgi o wykładniku naturalnym – zna definicję funkcji logarytmicznej; – potrafi odróżnić funkcję logarytmiczną od innej funkcji; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych; – potrafi opisać własności funkcji logarytmicznej na podstawie jej wykresu;	logarytmicznych (S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,0)}$), przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi rozwiązywać graficznie proste równania oraz nierówności z wykorzystaniem wykresu funkcji logarytmicznej – potrafi sprawnie przekształcać wyrażenia zawierające logarytmy, stosując poznane twierdzenia o logarytmach	
	Przykładowe zadania	
Zadanie 1. Narysuj wykresy funkcji: a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = \log_2 x$ i na podstawie wykresu omów własności funkcji. Zadanie 2. Oblicz: a) $\log_2 16$, b) $\log_\pi 1$, c) $\log_{\frac{1}{7}} 49$, d) $\log 10^{12}$ Zadanie 3 Oblicz: a) $\log_3 \frac{27}{8}$, b) $\log_4 2 + \log_4 32$, b) $\log_{\frac{1}{3}} 324 - 2\log_{\frac{1}{3}} 6$ Zadanie 4.	Zadanie 1. Rozwiąż graficznie równanie $3^x - 1 = -2x^2 + 4x$ Zadanie 2. Narysuj wykresy funkcji: a) $f(x) = 1 + \log_2(x+3)$ b) $f(x) = -4^{x+2}$ Zadanie 3. Rozwiąż graficznie nierówność: $1 - \log_{\frac{1}{2}} x > \frac{4}{x}$	Zadanie 1. Wiedząc, że $\log_{14} 2 = a$ i $\log_{14} 5 = b$, oblicz $\log_7 50$.

Oblicz x, jeśli : a) $\log_x 81 = 4$; b) $\log_2 x = -\frac{2}{3}$		

19. Stereometria

Tematyka zajęć:

- Proste i płaszczyzny w przestrzeni.
- Kąt między prostą a płaszczyzną.
- Kąt dwuścienny, kąt wielościenny.
- Graniastosłupy i ich siatki.
- Ostrosłupy i ich siatki.
- Bryły obrotowe.
- Objętość i pole powierzchni brył.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi określić położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni; – potrafi określić położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni; – potrafi określić położenie dwóch prostych w przestrzeni; – umie scharakteryzować prostopadłość prostej i płaszczyzny;	Uczeń: – zna i umie stosować twierdzenie o trzech prostopadłych; – zna i rozumie określenie kąta trójściennego (wielościennego); – umie znajdować przekroje brył; – umie zaznaczać kąty w bryłach (np. kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa); – rozumie określenie przekrój wielościanu	Uczeń: – umie udowodnić wybrane twierdzenia charakteryzujące położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni; – zna określenie i własności rzutu równoległego na płaszczyznę; – potrafi wykorzystać własności rzutu równoległego na płaszczyznę w

– umie scharakteryzować prostopadłość dwóch płaszczyzn; – rozumie pojęcie kąta miedzy prostą i płaszczyzną; – rozumie pojęcie kąta dwuściennego, poprawnie posługuje się terminem “kąt liniowy kąta dwuściennego”; – zna określenie graniastosłupa; umie wskazać: podstawy, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość, wierzchołki graniastosłupa; – zna podział graniastosłupów; – umie narysować siatki graniastosłupów prostych; – zna określenie ostrosłupa; umie wskazać: podstawę, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość, wierzchołki ostrosłupa; – rozumie określenie przekrój osiowy stożka i kąt rozwarcia stożka; – zna podział ostrosłupów; – umie narysować siatki ostrosłupów prostych; – zna określenie walca; umie wskazać: podstawy, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu walca; – rozumie określenie przekrój osiowy walca; – zna określenie stożka; umie wskazać: podstawę, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu, wierzchołek stożka; – zna określenie kuli; – rozumie pojęcie objętości bryły; – umie obliczać objętość i pole powierzchni	(przekrój bryły obrotowej); potrafi je stosować w rozwiązaniach zadań o średnim stopniu trudności; – zna i umie stosować twierdzenia charakteryzujące ostrosłup prosty i prawidłowy; – rozumie, co to znaczy, że graniastosłup jest wpisany w walec lub opisany na walcu; – rozumie, co to znaczy, że kula jest wpisana w wielościan (walec, stożek) lub opisana na wielościanie (walcu, stożku); – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne dotyczące brył o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń.	rysowaniu figur płaskich; – zna określenie rzutu prostokątnego na płaszczyznę i potrafi go stosować np. w określaniu odległości między dwiema płaszczyznami równoległymi lub w określeniu kąta między prostą a płaszczyzną; – umie udowodnić twierdzenie o przekątnych równoległościanu; – potrafi udowodnić twierdzenia charakteryzujące ostrosłup prosty i prawidłowy; – potrafi udowodnić twierdzenie o trzech prostopadłych; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne dotyczące brył o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.

poznanych graniastosłupów; – umie obliczać objętość i pole powierzchni poznanych ostrosłupów prawidłowych; – umie obliczać objętość i pole powierzchni brył obrotowych (stożka, kuli, walca); – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące brył, w tym z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych wcześniej twierdzeń.		
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym suma długości jego krawędzi jest równa 68 cm, a pole powierzchni całkowitej 190 cm^2. Oblicz długość krawędzi graniastosłupa. <u>Zadanie 2.</u> W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o wysokości $2\sqrt{3}$ cm, ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa. <u>Zadanie 3.</u> Znajdź pole powierzchni całkowitej walca, którego pole powierzchni bocznej jest równe P_b i którego przekrojem osiowym jest kwadrat.	<u>Zadanie 1.</u> Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Wszystkie krawędzie boczne mają długość 10 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa. <u>Zadanie 2.</u> W graniastosłup prawidłowy trójkątny wpisano kulę. Oblicz stosunek objętości kuli do objętości graniastosłupa oraz stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni całkowitej graniastosłupa. <u>Zadanie 3.</u> Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma 6 cm długości, a wysokość graniastosłupa ma $3\sqrt{2}$ cm długości. Wyznacz miarę kąta między przekątną ściany bocznej a płaszczyzną sąsiedniej ściany bocznej.	<u>Zadanie 1.</u> W graniastosłupie o podstawie trójkątnej łączymy wierzchołki jednej podstawy ze środkami przeciwległych krawędzi drugiej podstawy. Wykaż, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2. <u>Zadanie 2.</u> Trójkąt równoramienny o obwodzie długości k i kącie przy wierzchołku α, obraca się wokół podstawy. Oblicz objętość powstałej bryły.

20. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Tematyka zajęć:

- Kombinatoryka.
  - Permutacje.
  - Wariacje z powtórzeniami.
  - Wariacje bez powtórzeń.
  - Kombinacje.
- Rachunek prawdopodobieństwa.
  - Doświadczenia losowe; zdarzenia elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych; zdarzenie.
  - Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.
  - Własności prawdopodobieństwa.
  - Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem własności prawdopodobieństwa.
  - Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.
  - Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie permutacji i umie stosować wzór na liczbę permutacji; – zna pojęcie wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń i umie stosować wzory na liczbę takich wariacji; – zna pojęcie kombinacji i umie stosować wzór na liczbę kombinacji;	Uczeń: – umie uzasadnić wzory na liczbę permutacji, wariacji (z powtórzeniami i bez) oraz kombinacji; – umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne o średnim stopniu trudności; – umie udowodnić twierdzenie mówiące o własnościach prawdopodobieństwa;	Uczeń: – umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań “teoretycznych”; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa o podwyższonym stopniu trudności, z

– umie rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne z zastosowaniem poznanych wzorów; – zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się; – zna i rozumie aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa; – zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – umie określić (skończoną) przestrzeń zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego i obliczyć jej moc; – umie określić jakie zdarzenia elementarne sprzyjają danemu zdarzeniu; – zna i umie stosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa;	– umie rozwiązywać zadania dotyczące rachunku prawdopodobieństwa o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń.	wykorzystaniem poznanych twierdzeń.
	Przykładowe zadania	
<u>Zadanie 1.</u> Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych takich, w których: a) cyfry nie mogą się powtarzać, b) cyfry mogą się powtarzać? <u>Zadanie 2.</u> Z grupy 6 kobiet i 8 mężczyzn wybieramy losowo cztery osoby. Ile jest takich sposobów wyboru, aby wśród wybranych osób: a) były same kobiety,	<u>Zadanie 1.</u> W przedziale wagonu kolejowego są ustawione naprzeciw siebie dwie ławki. Każda ma 5 numerowanych miejsc. Do przedziału weszło pięć osób. Trzy osoby siadły na jednej ławce, pozostałe – na drugiej, naprzeciwko dwóch osób z pierwszej ławki. Ile jest takich rozmieszczeń osób w przedziale? <u>Zadanie 2.</u> Wielokąt wypukły ma n wierzchołków, spośród	<u>Zadanie 1.</u> Wiadomo, że $P(A \cap B') = P(B' \cap A)$, $P(A \cup B) = 0{,}75$, $P(A \cap B) = 0{,}25$. Oblicz $P(B)$, $P(A - B)$. <u>Zadanie 2.</u> Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tworzymy wszystkie trójwyrazowe ciągi o wyrazach należących do tego zbioru. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany losowo jeden taki ciąg będzie

b) były dwie kobiety i dwóch mężczyzn? <u>Zadanie 3.</u> Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że: a) suma oczek jest równa 7, b) na przynajmniej jednej z kostek wypadła liczba oczek większa od 4. <u>Zadanie 4.</u> Sześcian pomalowano, a następnie rozcięto na 1000 jednakowych sześcianików, które wrzucono do pudełka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego pudełka jednego sześcianika, który: a) będzie miał dwie ściany pomalowane, b) będzie miał jedną ścianę lub dwie ściany pomalowane.	których losujemy jednocześnie dwa. Jakie musi być n, aby prawdopodobieństwo, że wylosowane wierzchołki wyznaczają przekątną, było równe 0,9? <u>Zadanie 3.</u> W szufladzie Marek miał 5 par skarpet. W sposób losowy wybrał z niej cztery skarpety. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wybranych skarpet jest przynajmniej jedna para?	monotoniczny?

21. Elementy statystyki opisowej

Tematyka zajęć:

- Dane statystyczne i ich klasyfikacja.
- Średnia z próby.
- Mediana z próby.
- Odchylenie standardowe z próby.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów; – potrafi przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów, – potrafi obliczać średnią z próby, medianę z próby i odchylenie standardowe z próby i na tej podstawie przeprowadzać analizę przedstawionych danych; – potrafi określać zależności między odczytanymi danymi.	Uczeń: – potrafi przeprowadzić klasyfikacje danych i przedstawić je w postaci szeregu rozdzielczego; – potrafi odczytywać dane przedstawione w postaci szeregu rozdzielczego; – potrafi oszacować średnią, medianę i odchylenie standardowe danych przedstawionych w postaci szeregu rozdzielczego i na tej podstawie wyciągnąć odpowiednie wnioski.	
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> Pięćdziesiąt osób zdawało egzamin z przepisów ruchu drogowego. Liczba popełnionych przez nie błędów przedstawiona jest w poniższej tabeli: Liczba błędów: 0, 1, 2, 3, 4, 5 Liczba osób: 11, 8, 14, 7, 6, 4 a) Oblicz średnią liczbę błędów popełnionych przez zdającego. b) Ile procent zdających zdało egzamin, jeśli do tego można było popełnić co najwyżej dwa błędy? c) Przedstaw dane na diagramie kolumnowym i	<u>Zadanie 1.</u> Badano czas pisania kolokwium (w minutach) przez studentów dwóch grup. Otrzymano następujące wyniki: Czas pisania — Liczba studentów: I grupa, II grupa ⟨50, 60) — 2, 1 ⟨60, 70) — 4, 7 ⟨70, 80) — 8, 5 ⟨80, 90⟩ — 6, 7	

zaznacz na nim średnią obliczoną w punkcie a). <u>Zadanie 2.</u> Producent czekolady deklaruje, że tabliczka ma wagę 150g ± 2g. Dla zbadania jakości pewnej partii czekolady organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek czekolady z tej partii i otrzymała następującą ich wagę (w gramach): 150,4 148,9 150,1 152,8 146,6 154,3 150,8 151,1 150,6 149,5 Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady i odchylenie standardowe w badanej próbie. Zastanów się, czy organizacja konsumencka winna zwrócić się do producenta z reklamacją dotyczącą tej partii tabliczek czekolady.	 Oblicz średni czas, odchylenie standardowe i medianę czasu pisania kolokwium dla każdej z grup. Na tej podstawie porównaj te grupy.	

ZAKRES ROZSZERZONY

Spis treści

1. Elementy logiki

Tematyka zajęć:

- Zdanie w logice i jego negacja.
- Koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań.
- Niektóre prawa logiczne i ich zastosowanie.
- Forma zdaniowa jednej zmiennej.
- Kwantyfikator ogólny i szczegółowy. Negacja zdania z kwantyfikatorem.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi; – umie określić wartość logiczną zdania prostego; – potrafi podać negację zdania prostego i określić jej wartość logiczną; – potrafi rozpoznać zdania w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zadań; – potrafi zbudować zdania złożone w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zadań; – potrafi określić wartości logiczne zdań złożonych, takich jak koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań; – zna prawa De Morgana (prawo negacji alternatywy oraz prawo negacji koniunkcji) i potrafi je stosować; – potrafi określić wartość logiczną zdania	Uczeń: – potrafi sprawnie posługiwać się funktorami logicznymi; – potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne; – potrafi wnioskować o wartości zdania złożonego, na podstawie informacji o wartościach logicznych innych wyrażeń rachunku zdań; – rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę; – potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego; – zna prawo negacji implikacji i potrafi je stosować; – potrafi negować zdania złożone z wykorzystaniem poznanych praw logicznych; – potrafi udowodnić poznane prawa logiczne;	Uczeń: – potrafi przeprowadzić dowód twierdzenia; – potrafi dowodzić nie wprost; – potrafi zanegować równoważność zdań; – potrafi wyznaczyć zbiór wszystkich elementów spełniających podaną implikację form zdaniowych.

powstałego po negacji koniunkcji oraz alternatywy zdań; – odróżnia formę zdaniową jednej zmiennej od zdania; – potrafi określić dziedzinę prostej formy zdaniowej; – potrafi wskazać element dziedziny spełniający daną formę zdaniową; – rozumie zwrot “dla każdego x ....” oraz “istnieje takie x, że ....” i potrafi stosować te zwroty budując zdania logiczne; – potrafi ocenić wartość logiczną zdania z kwantyfikatorem; – zna prawa De Morgana dla zdań z kwantyfikatorem; – potrafi podać negację zdania z kwantyfikatorem i ocenić jej wartość logiczną.	– potrafi sprawdzić, czy dane wyrażenie rachunku zdań jest tautologią; – potrafi określić dziedzinę bardziej złożonej formy zdaniowej jednej zmiennej; – potrafi wskazać wszystkie elementy z dziedziny formy zdaniowej jednej zmiennej, które spełniają tę formę zdaniową; – potrafi wskazać formę zdaniową sprzeczną i tożsamościową; – potrafi określić zbiór wszystkich elementów spełniających koniunkcję lub alternatywę form zdaniowych; – potrafi posługiwać się symbolami kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego; – potrafi ocenić wartość logiczną zdania złożonego poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym lub szczegółowym; – potrafi podać negację zdania złożonego poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym lub szczegółowym oraz określić jej wartość logiczną.	
	Przykładowe zadania	
<u>Zadanie 1.</u> Dane jest zdanie “2 jest liczbą parzystą i 5 nie jest podzielne przez 3”. a) Oceń wartość logiczną zdania. b) Napisz zaprzeczenie zdania; podaj prawo logiczne z którego skorzystałeś.	<u>Zadanie 1.</u> Wiadomo, że $w(p \Rightarrow q) = 0$. a) Jaką wartość logiczną ma zdanie $[(\neg p) \vee (q \Leftrightarrow p)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee q]$? b) Napisz zaprzeczenie zdania “Będzie ładna pogoda lub jeśli będzie padał deszcz to pójdę spać”; podaj prawa logiczne z których skorzystałeś; udowodnij jedno z nich.	<u>Zadanie 1.</u> Na pytanie, który z trzech studentów studiował logikę otrzymano następującą odpowiedź: *Jeśli studiował Marek, to studiował też Wacek i nieprawdą jest, że jeśli studiował Tomek, to studiował Wacek.* Który z chłopców studiował logikę?

<u>Zadanie 2.</u> Dana jest forma zdaniowa $(x - \sqrt{3}) = 3$. a) Określ dziedzinę tej formy zdaniowej. b) Poprzedź formę zdaniową odpowiednim kwantyfikatorem tak, żeby otrzymać zdanie fałszywe. c) Jaką liczbę należy wstawić w miejsce zmiennej, aby otrzymane zdanie było prawdziwe.	<u>Zadanie 2.</u> Dana jest forma zdaniowa: $\sqrt{-x} \leq 3 \Rightarrow x^2 - 81 = 0$. a) Określ dziedzinę tej formy zdaniowej. b) Wskaż element spełniający tę formę zdaniową. c) Poprzedź tę formę zdaniową odpowiednim kwantyfikatorem, tak by otrzymać zdanie prawdziwe. d) Napisz negację zdania otrzymanego w punkcie c).	<u>Zadanie 2.</u> Wyznacz zbiór wszystkich elementów spełniających formę zdaniową: $\sqrt{-x} \leq 3 \Rightarrow x^2 - 81 = 0$.

2. Zbiory

Tematyka zajęć:

- Zbiór, element zbioru; działania na zbiorach.
- Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory.
- Działania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Pierwiastki i potęgi.
- Procenty. *Punkty procentowe.*
- Wartość bezwzględna.
- *Błąd przybliżenia. Szacowanie wartości liczbowych.*

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna takie pojęcia jak: zbiór pusty, zbiory równe, podzbiór zbioru; – zna symbolikę matematyczną dotyczącą zbiorów	Uczeń: – potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów; – potrafi dowodzić własności działań na zbiorach	Uczeń: – potrafi dowodzić twierdzenia dotyczące własności liczb rzeczywistych;

$(\in, \notin, \cup, \cap, -, \subset, \not\subset)$; – potrafi podać przykłady zbiorów (w tym przykłady zbiorów skończonych oraz nieskończonych); – potrafi określić relację pomiędzy elementem i zbiorem; – potrafi określić relację pomiędzy zbiorami (równość zbiorów, zawieranie się zbiorów, rozłączność zbiorów); – zna definicję sumy, iloczynu, różnicy zbiorów; – potrafi wyznaczać sumę, iloczyn i różnicę zbiorów; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych takich jak zbiór N, C, NW, W; – potrafi rozróżniać liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne; – potrafi wskazać liczby pierwsze i złożone; – zna i potrafi zastosować cechy podzielności liczb naturalnych (przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10); – potrafi rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze; – potrafi wyznaczyć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb naturalnych; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb całkowitych; – zna prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych; – potrafi porównywać liczby wymierne oraz liczby niewymierne; – potrafi przedstawiać liczby wymierne w postaci	w oparciu o poznane definicje (np. prawa De Morgana dla zbiorów, prawo rozdzielności dodawania zbiorów względem mnożenia itp.) oraz innymi metodami; – potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy zbiorami; – potrafi wyznaczyć dopełnienie zbioru (w tym przedziału liczbowego); – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, w których jest mowa o własnościach liczb całkowitych; – potrafi dowodzić twierdzenia dotyczące własności liczb całkowitych (np. dzielenie z resztą, podzielność liczb całkowitych itp.); – potrafi stosować wzory skróconego mnożenia takie jak: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, do usuwania niewymierności z mianownika ułamka; – potrafi stosować własności wartości bezwzględnej takie jak: $\lvert -x \rvert = \lvert x \rvert$, $\lvert x \rvert \geq 0$, $\lvert xy \rvert = \lvert x \rvert \lvert y \rvert$, $\frac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert} = \left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert$ w rozwiązywaniu zadań; – potrafi stosować własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.	– potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów; – potrafi usunąć niewymierność z mianownika ułamka w przykładach o podwyższonym stopniu trudności; – posługuje się takimi własnościami wartości bezwzględnej jak: $\lvert x + y \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$ oraz $\lvert \lvert x \rvert - \lvert y \rvert \rvert \leq \lvert x + y \rvert$ w rozwiązywaniu zadań i dowodzeniu twierdzeń.

ułamków zwykłych i dziesiętnych; – potrafi przedstawić ułamek okresowy w postaci ilorazu liczb całkowitych; – potrafi usuwać niewymierność z mianownika ułamka stosując wzór skróconego mnożenia (różnicę kwadratów dwóch wyrażeń); – potrafi wyznaczyć przybliżenie dziesiętne liczby rzeczywistej z żądaną dokładnością; – potrafi sprawnie wykonywać działania w zbiorze liczb rzeczywistych z wykorzystaniem praw działań; – potrafi porównywać wielkości; – *potrafi wyznaczyć błąd względny i bezwzględny;* – *potrafi szacować wartości liczbowe;* – potrafi sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \ldots + a^{n-1}),\ n \in N_+ - \{1\}$ i potrafi wykonywać działania na wyrażeniach, które zawierają wzory skróconego mnożenia; – zna prawa działań na potęgach o wykładnikach rzeczywistych; – zna pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej oraz prawa działań na pierwiastkach – *zna pojęcie pierwiastka stopnia nieparzystego z liczby ujemnej*		

– potrafi wykonywać działania na potęgach i pierwiastkach; – rozumie pojęcie przedziału liczbowego jako podzbioru zbioru liczb rzeczywistych; – potrafi zapisać za pomocą przedziałów zbiory opisane nierównościami; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną przedziałów liczbowych; – potrafi obliczyć procent danej liczby, a także wyznaczyć liczbę, gdy dany jest jej procent; – potrafi obliczyć jakim procentem jednej liczby jest druga liczba; – potrafi określić o ile procent dana wielkość jest większa (mniejsza) od innej wielkości; – potrafi posługiwać się procentem w prostych zadaniach tekstowych; – *zna i stosuje pojęcie punktu procentowego* – potrafi odczytywać dane w postaci tabel i diagramów, a także przedstawiać dane w postaci diagramów procentowych; – potrafi przeprowadzać analizę ilościową przedstawionych danych; – zna definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej interpretację geometryczną; – potrafi obliczyć wartość bezwzględną liczby; – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu: $\lvert cx - a \rvert = b$, $\lvert cx - a \rvert < b$, $\lvert cx - a \rvert > b$, $\lvert cx - a \rvert \le b$, $\lvert cx - a \rvert \ge b$; – potrafi na podstawie zbioru rozwiązań		

<table>
<tr><td>nierówności, zapisać tę nierówność w postaci nierówności z wartością bezwzględną;
– zna pojęcie średniej arytmetycznej, geometrycznej oraz harmonicznej liczb oraz potrafi obliczyć wymienione średnie.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Przykładowe zadania</td></tr>
<tr><td><u>Zadanie 1.</u>
Dane są zbiory: $A = \{x: x \in C \wedge x|4\}$,
$B = \{x: x \in C \wedge |x-2| \leq 3\}$, $D = \langle -3, 2)$.
Wypisz elementy zbiorów A oraz B, a następnie wyznacz zbiór $(A - D) \cap B$.

<u>Zadanie 2.</u>
a) Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $(3x-1)^3 - 3(x+1)(x^2 - x + 1) + 2(x-2)^3$.
b) Rozwiąż równanie $|x - 2| = 5$ i nierówność $|2x - 5| \geq 4$.
c) Oblicz wartość wyrażenia $625^{0,25} - 1,5 \cdot 100^{\frac{3}{2}} + 0,25^{-2,5}$.

<u>Zadanie 3.</u>
Średnia płaca w zakładzie zatrudniającym 34 osoby jest równa 820 zł. Po wypłaceniu pensji nowo przyjętemu pracownikowi, średnia płacy dla wszystkich zatrudnionych osób wzrosła o 2%. Jaką płacę otrzymał nowy pracownik?

<u>Zadanie 4.</u>
Na zawodach w skokach narciarskich, komentator</td><td><u>Zadanie 1.</u>
Udowodnij (korzystając z odpowiednich definicji działań na zbiorach oraz praw logiki) równość zbiorów $(A \cup B) - A = B - (A \cap B)$.

<u>Zadanie 2.</u>
Wyznacz pary wszystkich liczb całkowitych x i y spełniających równanie $x - y = xy$.

<u>Zadanie 3.</u>
Oblicz wartości wyrażeń:
$\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 6\sqrt{3}}$ oraz
$\left(\sqrt{\sqrt{2} - 1} + \sqrt{\sqrt{2} + 1}\right)^2$.

<u>Zadanie 4.</u>
Rozwiąż nierówność $||x + 2| - 5| > 1$.

<u>Zadanie 5.</u>
Cenę towaru obniżono o p%. O ile procent należy podwyższyć nową cenę, aby cena końcowa była równa początkowej?</td><td><u>Zadanie 1.</u>
Znajdź liczbę naturalną mniejszą od 1000, która przy dzieleniu przez 10 daje resztę 9, przy dzieleniu przez 15 – resztę 14, a przy dzieleniu przez 21 – resztę 20.

<u>Zadanie 2.</u>
Wykaż, że dla dowolnych $a, b, c \in R$ zachodzi nierówność
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

<u>Zadanie 3</u>
Wykaż, że $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$ jest liczbą naturalną.</td></tr>
</table>

sportowy ocenił pierwszy skok zawodnika na 122m podczas, gdy skoczek osiągnął długość skoku równą 124,5m. Drugi skok miał długość 123,5m, zaś komentator ocenił go na 126m. W którym przypadku komentator popełnił większy błąd?		

3. Wektory

Tematyka zajęć:

- Wektor w prostokątnym układzie współrzędnych; współrzędne wektora.
- Długość wektora (odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej).
- Wektory równe, wektory przeciwne.
- Działania na wektorach: dodawanie, odejmowanie i mnożenie wektora przez liczbę.
- Własności działań na wektorach.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna określenie wektora i potrafi podać jego cechy; – zna określenie wektorów równych i wektorów przeciwnych oraz potrafi stosować własności tych wektorów w rozwiązywaniu zadań; – potrafi obliczyć współrzędne wektora mając dane współrzędne początku i końca wektora; – potrafi obliczyć współrzędne początku wektora (końca wektora), gdy dane ma współrzędne	Uczeń: – zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; – stosuje własności działań na wektorach w typowych zadaniach na dowodzenie.	Uczeń: – potrafi sprawnie posługiwać się wektorami w dowodzeniu różnych twierdzeń.

wektora oraz współrzędne końca (początku) wektora; – potrafi wyznaczyć długość wektora (odległość między punktami na płaszczyźnie); – potrafi wykonywać działania na wektorach – dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie przez liczbę (syntetycznie i analitycznie); – potrafi obliczyć współrzędne środka odcinka.		
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> Dane są punkty A(– 1, 3), B(2, 7), C(6, 10). a) Oblicz $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$, $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$, $\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\rvert$. b) Wyznacz współrzędne punktu D tak, aby figura ABCD była równoległobokiem. <u>Zadanie 2.</u> Dla jakich rzeczywistych k oraz m wektory $\vec{a}=[\,k+m,\ k-m\,]$, $\vec{b}=[\,9,\ -15]$ są przeciwne? <u>Zadanie 3.</u> Dane są punkty A(1, –1), B(4, –2), C(10, –9). Wyznacz taki punkt D, aby $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}$.	<u>Zadanie 1.</u> W sześciokącie foremnym ABCDEF dane są: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$. Wyraź w zależności od $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF}$. <u>Zadanie 2.</u> Uzasadnij, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw.	

4. Przekształcenia geometryczne

Tematyka zajęć:

- Pojęcie przekształcenia geometrycznego.
- Przekształcenia izometryczne.
  - Przesunięcie równoległe.
  - Symetria osiowa.
  - Symetria środkowa.
  - Obrót.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie przekształcenia geometrycznego i potrafi podać przykłady przekształceń geometrycznych; – zna i rozumie pojęcie przekształcenia izometrycznego; – zna pojęcie przesunięcia równoległego o wektor i potrafi wyznaczyć obraz figury geometrycznej w przesunięciu równoległym o wektor; – zna pojęcie symetrii osiowej względem prostej i potrafi wyznaczyć obraz figury geometrycznej w symetrii osiowej względem prostej; – zna pojęcie symetrii środkowej względem punktu i potrafi wyznaczyć obraz figury geometrycznej w symetrii środkowej względem punktu; – potrafi wskazać punkty stałe poznanych przekształceń geometrycznych; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii osiowej względem osi OX oraz osi OY; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest	Uczeń: – potrafi stosować własności przekształceń geometrycznych w rozwiązywaniu zadań.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące przekształceń geometrycznych, w których stosuje oryginalne metody rozwiązań i które wymagają niestandardowych pomysłów.

obrazem danego punktu w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych; – zna i rozumie pojęcie środka symetrii figury; – zna i rozumie pojęcie osi symetrii figury; – potrafi wyznaczyć osie symetrii i środek symetrii danej figury, a także wskazać figury środkowo i osiowo symetryczne; – zna pojęcie kąta skierowanego; – potrafi wyznaczyć obraz figury w obrocie dookoła punktu o dany kąt.		
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> Dana jest prosta o równaniu $y = -2x + 3$. Wyznacz równanie prostej, która jest obrazem danej: a) w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{v} = [-1, 2]$; b) w symetrii względem osi OY; c) w symetrii względem osi OX; d) w symetrii względem punktu (0, 0). <u>Zadanie 2.</u> a) Podaj przykład figury osiowosymetrycznej i środkowosymetrycznej. b) Ile osi symetrii może mieć trójkąt? c) Czy istnieje trójkąt, który ma środek symetrii?	<u>Zadanie 1.</u> Czy istnieje liczba rzeczywista k, by przekształcenie P, gdzie $P((x, y)) = (kx, ky)$ było izometrią? Jeśli tak, to podaj wszystkie takie liczby k. <u>Zadanie 2.</u> Dany jest wektor $\overrightarrow{AB}$ i punkt S nie należący do prostej AB. Wykaż, że obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ w symetrii względem punktu S jest wektor $-\overrightarrow{AB}$. <u>Zadanie 3.</u> W wyniku obrotu prostej k otrzymano prostą k′ prostopadłą do k. Gdzie może znajdować się środek obrotu?	<u>Zadanie 1.</u> Udowodnij, że w symetrii środkowej obrazem prostej jest prosta do niej równoległa.

5. Funkcja i jej własności

Tematyka zajęć:

- Pojęcie funkcji; pojęcie funkcji liczbowej.
- Sposoby opisywania funkcji.
- Dziedzina funkcji liczbowej.
- Zbiór wartości funkcji liczbowej.
- Wykresy niektórych funkcji liczbowych.
- Miejsce zerowe funkcji liczbowej.
- Równość funkcji liczbowych.
- Różnowartościowość funkcji liczbowych.
- Monotoniczność funkcji liczbowych.
- Parzystość, nieparzystość funkcji liczbowych.
- Funkcje okresowe.
- Najmniejsza i największa wartość funkcji.
- Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu.

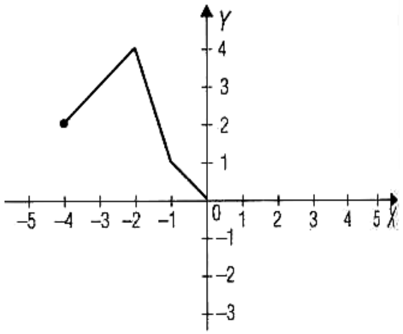
Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić funkcję od innych przyporządkowań; – potrafi podawać przykłady funkcji; – potrafi opisywać funkcje na różne sposoby: wzorem, tabelką, grafem, opisem słownym; – potrafi szkicować wykres funkcji liczbowej określonej słownie, grafem, tabelką, wzorem;	Uczeń: – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków; – potrafi wyznaczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (nie tylko w prostych przypadkach); – potrafi określić zbiór wartości funkcji liczbowej	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji i ich własności.

– potrafi odróżnić wykres funkcji od krzywej, która wykresem funkcji nie jest; – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem (w prostych przypadkach); – potrafi wyznaczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej danej wzorem (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć wartość funkcji liczbowej dla danego argumentu, a także obliczyć argument funkcji, gdy dana jest jej wartość; – potrafi określić zbiór wartości funkcji w prostych przypadkach (np. w przypadku, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem skończonym); – potrafi na podstawie wykresu funkcji liczbowej odczytać jej własności, takie jak: a) dziedzina funkcji; b) zbiór wartości funkcji; c) miejsce zerowe funkcji; d) argument funkcji, gdy dana jest wartość funkcji; e) wartość funkcji dla danego argumentu; f) przedziały w których funkcja jest rosnąca, malejąca, stała; g) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne; h) najmniejszą oraz największą wartość funkcji; i) parzystość, nieparzystość, okresowość; j) różnowartościowość; k) potrafi narysować wykres funkcji o zadanych własnościach;	(nie tylko wtedy, gdy dziedzina jest zbiorem skończonym); – potrafi badać monotoniczność funkcji liczbowej na podstawie definicji; – potrafi badać różnowartościowość funkcji na podstawie definicji; – potrafi badać parzystość, nieparzystość oraz okresowość funkcji na podstawie definicji; – potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ sporządzić wykresy funkcji: $y = \|f(x)\|$ oraz wykres funkcji $y = f(\|x\|)$ oraz zapisać wzory funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku tych przekształceń.	

– potrafi narysować wykres funkcji liczbowej, której wzór jest określony za pomocą wzorów różnych funkcji składowych; – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej oraz współrzędne punktu w którym wykres przecina oś OY, której wzór jest określony za pomocą wzorów różnych funkcji składowych; – potrafi opisać własności funkcji liczbowej, której wzór jest określony za pomocą wzorów różnych funkcji składowych; – potrafi stosować wiadomości o funkcji do opisywania zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym; – potrafi podać opis matematyczny prostej sytuacji w postaci wzoru funkcji; – potrafi interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji (np. dotyczące różnych zjawisk przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych); – potrafi przetwarzać informacje dane w postaci wzoru lub wykresu funkcji; – potrafi przekształcać wykresy funkcji – na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ sporządzić wykresy funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$, $y = f(x - a) + b$, $y = k\cdot f(x)$, $y = f(k\cdot x)$ oraz zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku danego przekształcenia.		
	Przykładowe zadania	
<u>Zadanie 1.</u> Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem	<u>Zadanie 1.</u>

całkowitej resztę z dzielenia tej liczby przez 4.
a) Oblicz wartość wyrażenia $-2f(-9) + 4f(7)$.
b) Podaj zbiór wartości funkcji.
c) Opisz wzorem miejsca zerowe funkcji.
d) Czy funkcja jest różnowartościowa, parzysta, nieparzysta, monotoniczna? Odpowiedź uzasadnij.
e) Narysuj wykres tej funkcji w zbiorze $A = \{x: x \in C \wedge -6 \le x \le 8\}$.

Zadanie 2.
Rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji $y = f(x)$, o której wiadomo, że jej dziedziną jest przedział $\langle -4, 4 \rangle$ i jest to funkcja nieparzysta.



Dorysuj brakujący fragment wykresu funkcji, a następnie podaj:
a) miejsca zerowe funkcji f;
b) przedziały monotoniczności;
c) zbiór wartości funkcji.

Zadanie 3.
Dana jest funkcja określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-|2x-3|}}{x^2-4x+4} + \frac{4}{x^3-x^2}.$$

Zadanie 2.
a) Zbadaj na podstawie definicji parzystość (nieparzystość) funkcji:
- $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+1}$;
- $g(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2-4}$.

b) Zbadaj monotoniczność funkcji $h(x) = x^2 - 6x$ w zbiorze $(-\infty, 3)$

Zadanie 3.
Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(|x-3|, 2)$. Na podstawie wykresu funkcji f, narysuj wykres funkcji $g(x) = f(|x|)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji $y = g(x)$.

Przedstaw funkcję $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+1}{x-1}$, gdzie $x \in R - \{-1, 1\}$ w postaci sumy funkcji parzystej i nieparzystej.

$F(x) = \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{3 - \lvert x+2 \rvert}}$. Oblicz miejsca zerowe tej funkcji. <u>Zadanie 4.</u> Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, a następnie przesuń go o wektor $\vec{u} = [-2, -4]$. a) Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymałeś. b) Oblicz miejsce zerowe funkcji, której wykres otrzymałeś. c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne?		

6. Funkcja liniowa

Tematyka zajęć:

- Definicja funkcji liniowej.
- Własności funkcji liniowej.
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych.
- Równanie liniowe i nierówność liniowa z jedną niewiadomą.
- Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi (równanie prostej).
- Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Układy nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Zastosowanie funkcji liniowej do opisywania zjawisk z życia codziennego.
- Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem równań i układów równań liniowych.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie funkcji liniowej; – potrafi interpretować współczynniki we wzorze funkcji liniowej; – potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem; – potrafi na podstawie wykresu funkcji liniowej (wzoru funkcji) określić monotoniczność funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie i graficznie zbiór tych argumentów dla których funkcja liniowa osiąga wartości dodatnie (ujemne, nieujemne, niedodatnie); – potrafi sprawdzić algebraicznie, czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej; – potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach (np. takiej, której wykres przechodzi przez dwa punkty); – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi narysować wykres funkcji kawałkami liniowej i na jego podstawie omówić własności funkcji;	Uczeń: – potrafi rozwiązać równanie liniowe z parametrem; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem; – potrafi rozwiązać równanie linowe oraz nierówność liniową z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem; – potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną oraz zinterpretować go graficznie; – potrafi wykreślać w prostokątnym układzie współrzędnych zbiory punktów opisane równaniem, nierównością, układem równań lub nierówności z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.	Uczeń: – potrafi rozwiązać nietypowe zadania dotyczące funkcji liniowej, o podwyższonym stopniu trudności.

– potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś OY; – potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu; – potrafi rozwiązać równanie liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi określić liczbę rozwiązań równania liniowego z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązać nierówność liniową z jedną niewiadomą i przedstawić jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej; – potrafi interpretować graficznie równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać algebraicznie (w tym metodą wyznacznikową) i graficznie układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozpoznać układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny i umie podać ich interpretację geometryczną; – potrafi zbadać wzajemne położenie dwóch prostych na płaszczyźnie; – potrafi rozwiązać zadanie tekstowe prowadzące do równania liniowego z jedną niewiadomą, nierówności liniowej z jedną niewiadomą lub układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi opisać daną figurę geometryczną w prostokątnym układzie współrzędnych, za pomocą odpowiedniego układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;		

– potrafi narysować w prostokątnym układzie współrzędnych figurę geometryczną zapisaną za pomocą układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.		
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1, 1\rangle \\ x-2 & \text{dla } x \in (1, +\infty) \end{cases}$. a) Oblicz miejsca zerowe tej funkcji oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś OY. b) Wyznacz algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja osiąga wartości nieujemne. c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu 6. d) Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie narysuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$; omów własności funkcji $y = g(x)$. Zadanie 2. a) Napisz wzór funkcji liniowej f wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $A(-\sqrt{3}, -2)$ i jest nachylony do osi OX pod kątem $\frac{2}{3}\pi$ rad. b) Napisz wzór funkcji liniowej g, której miejscem zerowym jest liczba 4 i której wykres	Zadanie 1. Wyznacz te wartości parametru m, dla których funkcja liniowa $f(x) = (\mid m-3\mid - 5)x - m + 10$ jest rosnąca i nieparzysta. Zadanie 2. Rozwiąż nierówność: $\sqrt{x^2+4x+4} - \mid 2x-5\mid \geq x+7$. Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru m ($m \in R$) układ równań z niewiadomymi x i y $\begin{cases} x - my = m \\ mx - y = 2 \end{cases}$ jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny? W przypadku istnienia rozwiązań wyznacz je. Zadanie 4. Wyznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają układ nierówności $\begin{cases} \mid x\mid - \mid y\mid \leq 2 \\ \mid x\mid \leq 4 \end{cases}$. Zadanie 5.	Zadanie 1. Rozwiąż równanie $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$.

jest prostopadły do wykresu funkcji f. <u>Zadanie 3.</u> Rozwiąż nierówność $\sqrt{5}\,x > 4x - 1$. <u>Zadanie 4.</u> Klub sportowy przeznaczył na kupno 28 dresów kwotę w wysokości 2860 zł. Zamierza kupić dresy w dwóch gatunkach. Jaką liczbę dresów pierwszego gatunku może kupić ten klub, jeśli wiadomo, że dres pierwszego gatunku kosztuje 125 zł, a dres drugiego gatunku 80 zł.	Mały zakład włókienniczy produkuje dwa rodzaje swetrów (damskie i męskie) z dwóch rodzajów wełny (czarnej i białej). Do produkcji jednego swetra damskiego potrzeba 20 dag wełny czarnej i 40 dag wełny białej, a do produkcji swetra męskiego — 60 dag wełny czarnej i 20 dag wełny białej. Zasoby wełny czarnej wynoszą 120 kg, natomiast białej 140 kg. Zysk osiągany ze sprzedaży swetra męskiego wynosi 38 zł, a ze swetra dla pań — 44 zł. Ile i jakie swetry powinien wyprodukować ten zakład, aby osiągnąć jak największy zysk?	

7. Funkcja kwadratowa

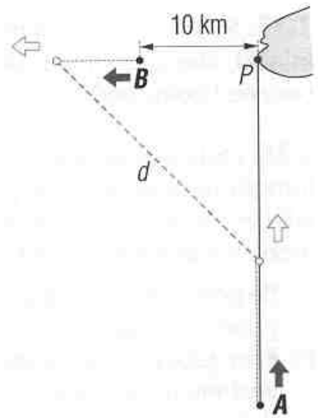
Tematyka zajęć:

- Jednomian stopnia drugiego.
- Postać ogólna funkcji kwadratowej.
- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej; postać iloczynowa funkcji kwadratowej.
- Własności trójmianu kwadratowego.
- Wzory Viete'a i ich zastosowanie.
- Równania i nierówności kwadratowe.
- Równania i nierówności kwadratowe z parametrem.
- Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną.
- Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych.

- Zastosowanie wiadomości o funkcji kwadratowej do analizowania zjawisk z życia codziennego.
- Równania prowadzące do równań kwadratowych.
- Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi rozpoznać jednomian stopnia drugiego; – potrafi narysować wykres jednomianu stopnia drugiego i omówić jego własności; – potrafi odróżnić wzór funkcji kwadratowej od wzoru innej funkcji; – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej lub sprawdzić, że trójmian kwadratowy nie posiada miejsc zerowych; – potrafi obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli; – potrafi narysować wykres dowolnej funkcji kwadratowej; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kwadratowej omówić jej własności; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej o zadanych własnościach; – potrafi sprawnie zamieniać jedną postać trójmianu kwadratowego na drugą (postać ogólna, kanoniczna, iloczynowa); – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w danym przedziale domkniętym; – potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania prostych zadań	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na współrzędne wierzchołka paraboli; – potrafi wyprowadzić wzory na miejsca zerowe trójmianu kwadratowego; – potrafi naszkicować wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną i na jego podstawie omówić własności funkcji; – potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą; – potrafi udowodnić wzory Viete'a; – potrafi stosować wzory Viete'a do rozwiązywania równań i nierówności z parametrem; – potrafi rozwiązywać różne zadania, w których występuje parametr, dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą z wartością bezwzględną; – potrafi graficznie rozwiązywać równania i	Uczeń: – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

optymalizacyjnych; – potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi graficznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać proste zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą; – zna wzory Viete'a i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem, w których jest mowa o własnościach funkcji kwadratowej; – potrafi przekształcać wyrażenia tak, by można było obliczać ich wartości stosując wzory Viete'a; – potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowych (symetria względem osi OX, symetria względem osi OY, symetria względem punktu O(0, 0), przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu; – potrafi przeanalizować zjawisko z życia codziennego, opisane wzorem (wykresem) funkcji kwadratowej; – potrafi opisać dane zjawisko za pomocą wzoru funkcji kwadratowej.	nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności pierwiastkowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych; – potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowych; – potrafi przeprowadzić dyskusję nad liczbą rozwiązań równania kwadratowego z parametrem i wartością bezwzględną na podstawie interpretacji graficznej rozważanego problemu; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności stopnia drugiego z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie układy równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego; – potrafi badać własności funkcji kwadratowej w oparciu o odpowiednie definicje; – potrafi dowodzić własności funkcji kwadratowej.	
	Przykładowe zadania	
<u>Zadanie 1.</u> Dany jest trójmian kwadratowy w postaci	<u>Zadanie 1.</u> Dla jakich wartości parametru m, miejsca zerowe	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz równania kwadratowe

kanonicznej $y = -2(x+3)^2 + 8$. Podaj postać ogólną i iloczynową tego trójmianu. Narysuj wykres funkcji i na jego podstawie omów jej własności. <u>Zadanie 2.</u> Funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f należy do prostej k: $y = 4x - 8$. a) Wyznacz współczynniki b oraz c. b) Oblicz miejsca zerowe funkcji. c) Rozwiąż nierówność $f(x) \le 4x - 8$. <u>Zadanie 3.</u> Wyznacz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $f(x) = x^2 + bx + c$ wiedząc, że jego miejsca zerowe spełniają warunek: $x_1 = 3$ i $x_1 + x_2 = 10$. <u>Zadanie 4.</u> Drut długości 2m podzielono na dwie części: z jednej zrobiono kwadratową ramkę a z drugiej ramkę prostokątną, w której jeden bok prostokąta ma długość 3 razy większą od długości drugiego boku. Jak należy podzielić drut, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?	x_1, x_2 funkcji o wzorze $f(x) = x^2 - 4(m+1)x + 2m(m-1)$ spełniają warunek $x_1 < m < x_2$? <u>Zadanie 2.</u> Dla jakich wartości parametru m równanie $\lvert x^2 - 4\rvert = m^2 + 1$ ma dwa różne rozwiązania? <u>Zadanie 3.</u> Rozwiąż nierówność $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$. <u>Zadanie 4.</u> O godzinie 13^{00} statek B płynący na zachód ze stałą prędkością 20 km/h znajduje się w odległości 10 km od portu, zaś statek A płynący na północ ze stałą prędkością 40 km/h znajduje się w odległości od portu 6 razy większej niż statek B.  O której godzinie odległość między statkami będzie najmniejsza?	$ax^2 + bx + c = 0$, o współczynnikach całkowitych a, b, c, gdzie $a \in C - \{0\}$, z których każde ma dwa różne rozwiązania: $x_1 = a$, $x_2 = b$.

8. Okrąg i koło w układzie współrzędnych

Tematyka zajęć:

Równanie okręgu, nierówność opisująca koło.
Odległość punktu od prostej.
Wzajemne położenie prostej i okręgu.
Wzajemne położenie dwóch okręgów.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – rozpoznaje równanie okręgu w postaci zredukowanej $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ oraz w postaci kanonicznej $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; – potrafi sprowadzić równanie okręgu z postaci zredukowanej do postaci kanonicznej (i odwrotnie); – potrafi odczytać z równania okręgu współrzędne środka i promień okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu, gdy zna współrzędne środka i promień tego okręgu; – rozpoznaje nierówność opisującą koło; – potrafi odczytać z nierówności opisującej koło współrzędne środka i promień tego koła; – potrafi napisać nierówność opisującą koło w sytuacji, gdy zna współrzędne środka i promień koła; – potrafi narysować w układzie współrzędnych	Uczeń: – potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych, w których konieczne jest zastosowanie wiadomości z różnych działów matematyki; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych.

okrąg na podstawie danego równania opisującego okrąg; – potrafi narysować w układzie współrzędnych koło na podstawie danej nierówności opisującej koło; – zna wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi obliczyć odległość punktu od prostej; – potrafi określić wzajemne położenie prostej o danym równaniu względem okręgu o danym równaniu (po wykonaniu stosownych obliczeń); – potrafi określić wzajemne położenie dwóch okręgów danych równaniami (na podstawie stosownych obliczeń); – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu lub stwierdzić, że prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych; – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów (lub stwierdzić, że okręgi nie przecinają się), gdy znane są równania tych okręgów; – potrafi wyznaczyć równanie stycznej do okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu opisanego na trójkącie, gdy dane ma współrzędne wierzchołków trójkąta; – potrafi rozwiązywać proste zadania z wykorzystaniem wiadomości o prostych, trójkątach, parabolach i okręgach.		
Przykładowe zadania		

Zadanie 1.
Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli A(1, 5), B(8, –2), C(9, 1).

Zadanie 2.
Określ wzajemne położenie prostej k: $y = \frac{1}{2}x$ względem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

Zadanie 2.
Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ przechodzących przez punkt A(–4, 3).

Zadanie 3.
W prostokątnym układzie współrzędnych wyznacz zbiory:
$A=\{(x, y): x\in R \text{ i } y\in R \text{ i } x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 \le 0\}$
$B=\{(x, y): x\in R \text{ i } y\in R \text{ i } x^2 + y^2 +2x + 2y - 14 \le 0\}$,
a następnie wyznacz zbiory: $A\cup B$, $A\cap B$, $A - B$, $B - A$.

Zadanie 4.
Prosta k: $y = x +1$ przecina parabolę o równaniu $y = - x^2 + 2x + 3$ w punktach A i B.
Oblicz współrzędne punktów A i B.
Napisz równanie okręgu o promieniu
$r = \sqrt{5}$, którego średnicą jest odcinek AB.
Oblicz pole ΔABS, gdzie S jest środkiem okręgu wyznaczonego w punkcie b).

Zadanie 1.
Udowodnij, że równanie
$x^2 + y^2 - ax + 2by - 0{,}75a^2 + 2ab = 0$
opisuje okrąg dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b takich, że $a \ne b$. Podaj współrzędne środka i promień okręgu.

Zadanie 2.
Dla jakich wartości parametru m ($m\in R$) okręgi opisane równaniami
o_1: $(x - m)^2 + (y + 2)^2 = 20$ oraz
o_2: $(x +1)^2 + (y - 2m)^2 = 5$ są wewnętrznie styczne?
Dla znalezionych wartości parametrów wykonaj rysunek. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Zadanie 3.
Wykres funkcji $y = |x - 2|$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ w punktach A i B.
Oblicz współrzędne punktów A i B.
Wykaż, że trójkąt ABC, gdzie S jest środkiem okręgu, jest prostokątny.
c) Oblicz pole figury $F = F_1\cap F_2$, gdzie
$F_1 = \{(x, y): x\in R \wedge y\in R \wedge x^2 + y^2 - 4x - 4 \le 0\}$, a
$F_2 = \{(x, y): x\in R \wedge y\in R \wedge y \le |x - 2|\}$.

Zadanie 1.
Przez punkt $A = (0, 1)$ poprowadzono styczne do okręgu $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$. Znajdź równanie krzywej, którą tworzą środki wszystkich cięciw danego okręgu, wyznaczonych przez proste przechodzące przez punkt A.

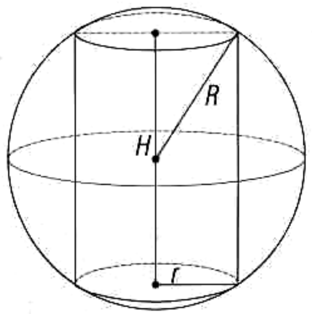
9. Wielomiany

Tematyka zajęć:

- Definicja wielomianu stopnia n ($n \in N_+$) jednej zmiennej rzeczywistej.
- Równość wielomianów.
- Działania arytmetyczne na wielomianach.
- Pierwiastek wielomianu, pierwiastek wielokrotny.
- Twierdzenie Bezouta i jego zastosowanie.
- Twierdzenie o reszcie.
- Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.
- Metody rozkładania wielomianu na czynniki.
- Równania i nierówności wielomianowe.
- Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie jednomianu jednej zmiennej; – potrafi wskazać jednomiany podobne; – potrafi rozpoznać wielomian jednej zmiennej rzeczywistej; – potrafi uporządkować wielomian (malejąco lub rosnąco); – potrafi określić stopień wielomianu jednej zmiennej; – potrafi obliczyć wartość wielomianu dla danej wartości zmiennej; – potrafi rozpoznać wielomiany równe;	Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania na wielomianach; – potrafi udowodnić twierdzenie Bezouta; – zna i potrafi stosować twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych; – potrafi udowodnić twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych; – potrafi sprawnie rozkładać wielomiany na czynniki (w tym stosując “metodę prób”);	Uczeń: – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące wielomianów, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

– potrafi rozwiązywać proste zadania, w których wykorzystuje się twierdzenie o równości wielomianów; – potrafi wykonać dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów; – potrafi dzielić wielomian przez wielomian; – potrafi sprawdzić czy podana liczba jest pierwiastkiem wielomianu; – potrafi określić krotność pierwiastka wielomianu; – zna twierdzenie Bezouta i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – zna twierdzenie o reszcie i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć wielomian, który jest resztą z dzielenia wielomianu o danych własnościach przez inny wielomian; – potrafi rozłożyć wielomian na czynniki poprzez wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias, zastosowanie wzorów skróconego mnożenia, zastosowanie metody grupowania wyrazów, a także wówczas, gdy ma podany jeden z pierwiastków wielomianu i konieczne jest znalezienie pozostałych z wykorzystaniem twierdzenia Bezouta; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe, które wymagają umiejętności rozkładania wielomianów na czynniki wymienionych w poprzednim punkcie; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące wielomianów, w których występują parametry.	– potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z parametrem; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych; – potrafi udowodnić wzory Viete’a dla równania trzeciego stopnia.	

Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ ma dwa różne miejsca zerowe: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 3$, przy czym pierwiastek x_2 jest dwukrotny. Dla argumentu 1 wartość wielomianu wynosi –12. a) Wyznacz wartości współczynników a, b, c, d. b) Dla wyznaczonych współczynników rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$. Zadanie 2. Rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia wielomiany: a) $W(x) = 125x^3 - 8$; b) $W(x) = 9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$; c) $W(x) = 6x^4 - 12x^3 + 6x^2$. Podaj miejsca zerowe powyższych wielomianów. Określ krotność pierwiastków. Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^4 - 3x^2 + ax + a^2x + 2$ przez dwumian $(x - 1)$ jest większa od 3? Zadanie 4. Rozwiąż równanie i nierówność: a) $x^3 + 4x - 2x - 8 = 0$; b) $(x^2 + 1)(x - x^2 - 5)(x^2 + 6x + 9)(x^2 - x + 2) \geq 0$.	Zadanie 1. Udowodnij , że jeśli x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami równania $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, to $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \end{cases}$. Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^4 + 2(m - 2)x^2 + m^2 - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki? Zadanie 3. W kulę o promieniu 10 cm wpisano walec, którego objętość stanowi 43,2% objętości kuli.  Wyznacz wymiary walca. Zadanie 4. Rozwiąż nierówność $x^2 \leq \|6x - x^3\|$.	Zadanie 1. Znajdź wszystkie pary p, q liczb całkowitych takie, że wielomian określony wzorem $W(x) = 1 - 2x - 9x^2 + x^3$ spełnia warunki $W(p) = q$ i $W(q) = p$.

10. Funkcje wymierne

Tematyka zajęć:

- Definicja funkcji wymiernej; dziedzina funkcji wymiernej.
- Działania na wyrażeniach wymiernych.
- Funkcja homograficzna i jej własności.
- Równania i nierówności wymierne.
- Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wymiernych.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi na podstawie wzoru odróżnić funkcję wymierną od innej funkcji; – potrafi określić dziedzinę funkcji wymiernej (wyrażenia wymiernego); – potrafi napisać wzór funkcji wymiernej o zadanej dziedzinie; – potrafi sprawdzić, czy dane funkcje wymierne są równe; – potrafi wykonywać działania na wyrażeniach wymiernych takie jak: skracanie wyrażeń wymiernych, rozszerzanie wyrażeń wymiernych, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych, określając warunki wykonalności tych działań; – zna definicję funkcji homograficznej $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$;	Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania łączne na wyrażeniach wymiernych; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych (w tym z wartością bezwzględną); – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z parametrem; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych (w tym z parametrem); – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności funkcji wymiernej (w tym z parametrem); – potrafi dowodzić własności funkcji wymiernej; – potrafi narysować wykres funkcji homograficznej	Uczeń: – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania wymiernego z parametrem; – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji wymiernych wymagające zastosowania niekonwencjonalnych metod.

– potrafi przekształcić wzór funkcji $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$ do postaci $y = \frac{k}{x-p} + q$; – potrafi narysować wykres funkcji homograficznej o równaniu $y = \frac{k}{x-p} + q$; – potrafi na podstawie wzoru funkcji $y = \frac{k}{x-p} + q$ określić jej dziedzinę i zbiór wartości; – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji homograficznej oraz współrzędne punktu, w którym hiperbola przecina oś OY; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $y = \frac{k}{x-p} + q$; – potrafi porównać wartości dwóch funkcji homograficznych; – potrafi przekształcać wykres funkcji homograficznej w S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,\,0)}$, przesunięciu równoległym o dany wektor; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem dotyczące funkcji homograficznej; – potrafi rozwiązywać proste zadania tekstowe dotyczące proporcjonalności odwrotnej; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności wymierne.	z wartością bezwzględną i na podstawie wykresu funkcji opisać jej własności; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wymiernych.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1.
Promień dużego koła bicyklu ma długość 54 cm, a promień małego kółka – 20 cm. Oblicz ile obrotów wykonało małe kółko, jeśli w tym samym czasie duże koło obróciło się 50 razy. Jaką odległość pokonał wtedy bicykl?

Zadanie 2.
a) Wyznacz dziedzinę funkcji wymiernej określonej wzorem
$$f(x) = \frac{2x^2-8}{x^3-2x^2-3x+6}.$$
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji.
c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne?

Zadanie 3.
Rozwiąż równanie i nierówność:
$$\frac{x+9}{x^2+x-12}-\frac{x+5}{x^2-x-6}=\frac{x-1}{x^2-9};$$
$$x^2 + 3x - 1 < \frac{3}{x}.$$

Zadanie 4.
Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = \frac{ax-1}{x+2}$.
Wyznacz a tak, aby do wykresu funkcji należał punkt A (3, 1), a następnie:

Zadanie 1.
Dla jakich wartości parametru m ($m\in R$) nierówność
$$-7 < \frac{x^2+(m+1)x-5}{x^2-x+1} < 3$$
jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x?

Zadanie 2.
Rozwiąż równanie $\frac{|x^2-x|+1}{|x+1|-x^2}=1$.

Zadanie 3.
Funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, a, b, c $\in R$ jest monotoniczna w przedziałach $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$, zbiorem wartości funkcji jest zbiór $R - \{2\}$, zaś jej miejscem zerowym jest liczba –2,5. Wyznacz wartości a, b, c, a następnie:
a) podaj zbiór argumentów, dla których funkcja osiąga wartości nieujemne
b) narysuj wykres funkcji $g(x) = f(|x|)$ i na jego podstawie zbadaj liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$, gdzie $m\in R$.

Zadanie 4.
Przez jeden z kranów woda wypływa ze zbiornika, a przez drugi do niego wpływa. Gdy otworzymy oba krany, zbiornik zostanie napełniony wodą w

Zadanie 1.
Rozwiąż równanie z parametrem a ($a\in R$):
$$\frac{1}{2a+ax}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(a+3)}{x^3-4x}.$$

Zadanie2.
Wykaż, że jeśli $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ i $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ to $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

a) sprowadź wzór tej funkcji do postaci $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$; b) określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji; c) podaj przedziały monotoniczności funkcji. Dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji $g(x) = \frac{x+3}{2x-5}$?	ciągu 12 godzin. W ciągu ilu godzin pierwszy kran opróżnia pełny zbiornik , a drugi napełnia pusty zbiornik, jeśli wiadomo, że czas napełniania zbiornika jest o godzinę krótszy od czasu jego opróżniania?	

11. Ciągi

Tematyka zajęć:

- Definicja ciągu; ciąg liczbowy.
- Sposoby opisywania ciągów.
- Ciągi monotoniczne.
- Pojęcie granicy ciągu liczbowego.
- Własności ciągów zbieżnych.
- Ciąg arytmetyczny.
- Ciąg geometryczny.
- Szereg geometryczny.
- Ciągi rozbieżne do nieskończoności.
- Oprocentowanie lokat i kredytów (procent prosty i składany).

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna definicję ciągu (ciągu liczbowego); – potrafi wyznaczyć dowolny wyraz ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi narysować wykres ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi podać przykłady ciągów liczbowych monotonicznych; – potrafi sprawdzić, które wyrazy ciągu należą da danego przedziału; – potrafi obliczyć, które wyrazy ciągu mają podaną wartość; – rozumie intuicyjnie pojęcie granicy ciągu liczbowego zbieżnego; – zna i potrafi stosować twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych; – potrafi obliczyć granicę ciągu liczbowego (proste przykłady); – zna definicję ciągu arytmetycznego; – potrafi zbadać na podstawie definicji czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest arytmetyczny; – potrafi podać przykłady ciągów arytmetycznych; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań	Uczeń: – potrafi określić ciąg wzorem rekurencyjnym; – potrafi podać wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym; – potrafi, stosując zasadę indukcji matematycznej, wykazać równoważność wzoru ogólnego i rekurencyjnego danego ciągu; – potrafi badać własności ciągu określonego wzorem rekurencyjnym (np. monotoniczność ciągu, zbieżność ciągu); – zna definicję i rozumie pojęcie granicy ciągu liczbowego zbieżnego; – potrafi wykazać na podstawie definicji, że dana liczba jest granicą ciągu; – potrafi obliczać granice różnych ciągów zbieżnych; – potrafi obliczać granice niewłaściwe różnych ciągów rozbieżnych do nieskończoności; – potrafi udowodnić wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego; – potrafi udowodnić wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego; – potrafi udowodnić wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – potrafi udowodnić wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; – potrafi rozwiązywać zadania mieszane dotyczące ciągów arytmetycznego i geometrycznego; – potrafi rozwiązywać różne zadania z	Uczeń: – zna, rozumie i potrafi zastosować twierdzenie o trzech ciągach do obliczenia granicy danego ciągu; – potrafi udowodnić twierdzenia dotyczące własności ciągów (np. twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych, twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o zbieżności ciągu monotonicznego i ograniczonego oraz inne twierdzenia dotyczące własności ciągów zbieżnych); – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie, w których jest mowa o ciągach; – wie co to jest liczba e oraz potrafi obliczać granice ciągów z liczbą e.

wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – potrafi wykorzystać średnią arytmetyczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu arytmetycznego; – zna definicję ciągu geometrycznego; – potrafi zbadać na podstawie definicji czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest geometryczny; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego; – zna i potrafi stosować wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; – potrafi wykorzystać średnią geometryczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu geometrycznego; – potrafi wyznaczyć ciąg arytmetyczny (geometryczny) na podstawie wskazanych danych; – potrafi odróżnić ciąg geometryczny od szeregu geometrycznego; – zna warunek na zbieżność szeregu geometrycznego i wzór na sumę szeregu; – potrafi zbadać warunek na istnienie sumy szeregu geometrycznego (proste przykłady); – potrafi obliczać sumę szeregu geometrycznego (zamiana ułamka okresowego na ułamek zwykły, proste równania i nierówności wymierne, proste zadania geometryczne); – potrafi obliczać granice niewłaściwe ciągów rozbieżnych do nieskończoności (proste przykłady);	zastosowaniem wiadomości o szeregu geometrycznym zbieżnym.	

<table>
<tr><td>– potrafi stosować procent prosty i składany w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Przykładowe zadania</td></tr>
<tr><td>Zadanie 1.
Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym
$a_n = \frac{3n+4}{n+1}$.
a) Zbadaj monotoniczność ciągu.
b) Oblicz granicę ciągu.
c) Oblicz, które wyrazy ciągu należą do przedziału $(3\frac{1}{8}, 3\frac{3}{4})$.

Zadanie 2.
Suma czwartego i siódmego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 86, a suma drugiego i trzynastego wyrazu tego ciągu jest równa 22. Znajdź pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu. Oblicz ile wyrazów tego ciągu daje w sumie liczbę -73450.

Zadanie 3.
Firma zdeponowała w banku pewną kwotę pieniędzy na trzy lata. Po tym okresie na koncie tej firmy było 283031,15 zł. Wiedząc, że roczna stopa procentowa wynosiła 20%, a odsetki kapitalizowane były co pół roku, oblicz jaką kwotę zdeponowała firma.</td><td>Zadanie 1.
a) Wykaż, na podstawie definicji, że liczba $\frac{2}{3}$ jest granicą ciągu $a_n = \frac{2n+1}{3n-2}$.
b) Oblicz granice ciągów:
• $a_n = \sqrt{n^2 - 2n} - n$
• $b_n = \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+.....+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+.....+\frac{1}{4^{n-1}}}$.

Zadanie 2.
Środkowy wyraz arytmetycznego ciągu pięciowyrazowego wynosi 5. Wyrazy: pierwszy, drugi i piąty tego ciągu wyznaczają ciąg geometryczny. Wyznacz wyrazy ciągu geometrycznego.

Zadanie 3.
Dany jest ciąg określony wzorem rekurencyjnym:</td><td>Zadanie 1.
Udowodnij, że jeśli a, b, c i d tworzą ciąg geometryczny to $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

Zadanie 2.
Oblicz granice ciągów:
a) $a_n = \frac{2n^2 \cdot \cos(4n)}{n^3 + 3n + 5}$;
b) $b_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2}$.</td></tr>
</table>

Zadanie 4. Zapisz liczbę 0,93303303303...... w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych Rozwiąż równanie $2x + 4 + \frac{8}{x} = -\frac{16}{3}$.	$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2} \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2^n} \end{cases}$ Udowodnij, że $b_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}$.	

12. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

Tematyka zajęć:

- Funkcja wykładnicza i jej własności.
- Równania i nierówności wykładnicze.
- Definicja logarytmu liczby dodatniej.
- Własności logarytmów.
- Funkcja logarytmiczna i jej własności.
- Równania i nierówności logarytmiczne.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna definicję funkcji wykładniczej; – potrafi odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji; – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych; – potrafi opisać własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu;	Uczeń: – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z parametrem; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem – potrafi rozwiązywać zadania na

– potrafi przekształcać wykresy funkcji wykładniczych (S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,0)}$, przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie proste równania oraz nierówności wykładnicze; – potrafi obliczyć logarytm liczby dodatniej; – zna i potrafi stosować własności logarytmów do obliczania wartości wyrażeń; – zna definicję funkcji logarytmicznej; – potrafi odróżnić funkcję logarytmiczną od innej funkcji; – potrafi określić dziedzinę funkcji logarytmicznej; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych; – potrafi opisać własności funkcji logarytmicznej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych (S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,0)}$, przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie proste równania oraz nierówności logarytmiczne.	wykładnicze oraz logarytmiczne z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych; – potrafi rozwiązywać równania wykładniczo – potęgowo – logarytmiczne; – potrafi narysować zbiór punktów płaszczyzny spełniający dane równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi w których występują logarytmy; – potrafi badać, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych (np. parzystość, nieparzystość funkcji); – potrafi stosować wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej w różnych zadaniach (np. z zastosowaniem wiadomości o ciągach, szeregu geometrycznym itp.).	dowodzenie z zastosowaniem wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej; – potrafi dowodzić własności logarytmów.
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. a) Rozwiąż graficznie równanie $3^x - 1 = -2x^2 + 4x$. b) Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{x-1} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{x+1}$. c) Rozwiąż równanie $\log(x + 3) - \log 0{,}4 = 2\log (x - 2)$.	Zadanie 1. Rozwiąż równanie i nierówność: a) $\frac{1}{4}\sqrt{12-3^{x+1}} = 3^x - 3^{x-1} - 3^{x-2} - 3^{x-3} + \ldots$ b) $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.	Zadanie 1. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in R$, dla których równanie $\log[(m + 4)x] = \log(x^2 + 2x)$ ma tylko jedno rozwiązanie, które jest liczbą ujemną.

Zadanie 2. Określ dziedzinę funkcji f(x) = $\log_{x^2-1}(x^2-2x-3)$. Zadanie 3. Narysuj wykres funkcji f(x) = 1 – $\log_2(x+3)$ i na jego podstawie omów własności funkcji.	Zadanie 2. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek: $\log_{x+1}(y-4)<1$. Zadanie 3. Zbadaj parzystość (nieparzystość) funkcji f(x) = $\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.	Zadanie 2. Wykaż, że $\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8 \geq 4{,}4$.

13. Indukcja matematyczna, dwumian Newtona

Tematyka zajęć:

- Zasada indukcji matematycznej i jej zastosowanie w dowodzeniu twierdzeń.
- Symbol Newtona i jego własności.
- Dwumian Newtona.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna symbol "silnia"; – potrafi obliczać wartości wyrażeń z symbolem silnia; – zna symbol Newtona; – potrafi obliczać wartości wyrażeń z symbolem Newtona; – potrafi upraszczać wyrażenia zawierające symbol	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania w których występuje symbol Newtona; – potrafi obliczać wartości wyrażeń w których występuje symbol Newtona (trudniejsze przykłady); – potrafi udowodnić i stosować własności symbolu Newtona;	Uczeń: – potrafi stosować zasadę indukcji matematycznej w dowodzeniu twierdzeń (np. dowodzenie prawdziwości nierówności, w których jest mowa o własnościach liczb naturalnych).

silnia oraz symbol Newtona; – potrafi rozpisać wzór dwumianowy Newtona (potrafi znaleźć odpowiednie współczynniki korzystając z trójkąta Pascala); – potrafi zastosować zasadę indukcji matematycznej, do wykazania prawdziwości wzorów (równości) dotyczących liczb naturalnych.	– potrafi stosować wzór dwumianowy Newtona w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć dowolny wyraz w rozwinięciu dwumianu Newtona; – potrafi stosować zasadę indukcji matematycznej w dowodzeniu podzielności liczb naturalnych.	
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> Oblicz wartości wyrażeń: a) $\dfrac{\binom{21}{5}+\binom{21}{16}}{2\cdot\binom{21}{6}}$; b) $5! - 2!\cdot 4!$. <u>Zadanie 2.</u> Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia i podaj założenia: a) $\dfrac{(2n-2)!\cdot(n-3)!}{(2n-5)!n!}$; b) $\dfrac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}}$.	<u>Zadanie 1.</u> Oblicz n, jeśli: $\binom{2n-3}{2n-5}+\binom{2n-3}{2n-4}=15$. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz środkowy wyraz rozwinięcia: $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{18}$. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n, liczba $2^{6n+1}+9^{n+1}$ jest podzielna przez 11.	<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n, zachodzi nierówność: $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1}>1$.

Zadanie 3. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, zapisz w postaci sumy $(x + 2)^6$. Zadanie 4. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$		

14. Trygonometria, cz. 1

Tematyka zajęć:

- Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
- Miara łukowa kąta.
- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne.
- Wzory redukcyjne.
- Wykresy funkcji trygonometrycznych.
- Proste równania i nierówności trygonometryczne.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków;	Uczeń: – zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta; – potrafi określić znaki funkcji	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych

– potrafi znaleźć w tablicach kąt o danej wartości funkcji trygonometrycznej; – potrafi odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta; – zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$; – potrafi dowodzić proste tożsamości trygonometryczne; – potrafi stosować wzory redukcyjne; – potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym; – potrafi stosować miarę łukową i stopniową kąta (zamieniać stopnie na radiany i odwrotnie).	trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych; – potrafi konstruować kąty w układzie współrzędnych w oparciu o wartości funkcji trygonometrycznych; – potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich; – potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne; – potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych i na ich podstawie określać własności funkcji trygonometrycznych; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne na podstawie wykresów funkcji trygonometrycznych; – potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych (symetria względem osi OX, symetria względem osi OY, symetria względem punktu O(0, 0), przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu.	pomysłów i metod.
	Przykładowe zadania	
<u>Zadanie 1.</u> a) Oblicz wartość wyrażenia:	<u>Zadanie 1.</u>	<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że równanie

$\sin 30° \cdot \cos 60° + \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{ctg} 30°$. b) Zamień na stopnie: $\frac{2}{3}\pi$ rad, 5π rad. c) Zamień na radiany: 150°, 36°. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym ABC dane są: długość przeciwprostokątnej $\lvert BC\rvert = \sqrt{146}$ cm oraz długość przyprostokątnej $\lvert AB\rvert = 5$ cm. a) Oblicz długość drugiej przyprostokątnej. b) Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych). c) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną. <u>Zadanie 3.</u> Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma wieża? <u>Zadanie 4.</u> Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. <u>Zadanie 5.</u> Sprawdź, czy równość	Zbuduj kąt o mierze α takiej, że $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. <u>Zadanie 2.</u> Wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz: $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$. <u>Zadanie 3.</u> Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji trygonometrycznych: a) rozwiąż równanie $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) rozwiąż nierówność $-\frac{1}{2} < \sin\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, jeśli $\alpha \in \langle -\pi, 2\pi\rangle$. <u>Zadanie 4.</u> Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się on na wysokości h metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie t sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością v wznosi się balon?	$\sin x = 2\sin 48° \cdot \cos 42°$ nie ma rozwiązań.

$\frac{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną.		

15. Trygonometria, cz. 2

Tematyka zajęć:

- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów.
- Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta.
- Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych.
- Równania i nierówności trygonometryczne.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań; – zna wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań; – zna wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem poznanych wzorów.	Uczeń: – potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych; – potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności lub wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod rozwiązywania.

	– potrafi rozwiązywać równania nierówności trygonometryczne z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzorów na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z wartością bezwzględną z zastosowaniem poznanych wzorów; – potrafi określić zbiór wartości funkcji trygonometrycznej; – potrafi wyznaczyć okres podstawowy funkcji trygonometrycznej; – potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne z parametrem; – potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać różne zadania z innych działów matematyki, w których wykorzystuje się wiadomości i umiejętności z trygonometrii.	
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia $\cos\alpha - \cos\beta$, jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{7}}{5}$ i $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Wiedząc, że $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\sin\alpha = \frac{1}{3}$	Zadanie 1. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \cos x + \cos\frac{x}{2}$. Zadanie 2. Wykaż, że $2(1 + \cos\alpha) - \sin^2\alpha = 4\cos^4\frac{\alpha}{2}$.	Zadanie 1. Rozwiąż równanie: $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$.

i $\sin\beta = \frac{1}{2}$, oblicz $\sin(\alpha + \beta)$. Zadanie 2. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu $1 + \cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}$ Zadanie 3. Sprawdź, czy prawdziwa jest tożsamość $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$, podaj konieczne założenia. Zadanie 4. Rozwiąż równania i nierówności: a) $2\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 1$; b) $4\cos^3 x - 8\cos^2 x - \cos x + 2 = 0$.	Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru m ($m \in R$) równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = m$ ma rozwiązanie. Zadanie 4. a) Rozwiąż równania: $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; $\sin 3x + \sin x = \cos x$. b) Rozwiąż nierówności: $\mathrm{ctg}\,x < 2 - \frac{\sin x}{1+\cos x}$; $\cos 4x + 2\cos^2 x \geq 1$.	

16. Podstawowe własności figur geometrycznych na płaszczyźnie, cz.1

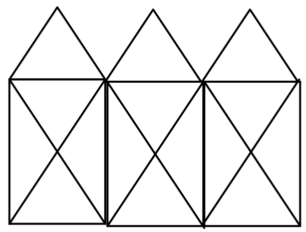
Tematyka zajęć:

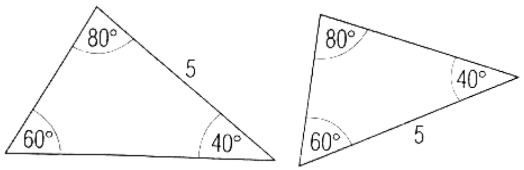
- Punkty, proste, półproste, odcinki, figury wypukłe, figury wklęsłe.
- Pojęcie odległości.
- Figury ograniczone, figury nieograniczone.
- Kąty.
- Położenie prostych na płaszczyźnie.
- Łamana, wielokąt.

- Trójkąty – podział, własności.
    - Środkowe trójkąta.
    - Przystawanie trójkątów.
    - Zależności między bokami i kątami w trójkącie.
    - Nierówność trójkąta.
    - Twierdzenie o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.
    - Suma kątów w trójkącie.
    - Symetralne boków w trójkącie.
    - Dwusieczne kątów w trójkącie.
    - Wysokości w trójkącie.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna figury podstawowe (punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń) i potrafi zapisać relacje między nimi; – zna pojęcie figury wypukłej i wklęsłej, potrafi podać przykłady takich figur; – zna pojęcie figury ograniczonej i figury nieograniczonej, potrafi podać przykłady takich figur; – rozumie pojęcie odległości, umie wyznaczyć odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych; – zna określenie kąta i podział kątów ze względu na ich miarę; – zna pojęcie kątów przyległych i kątów wierzchołkowych oraz potrafi zastosować	Uczeń: – zna i rozumie aksjomatyczną definicję odległości; – zna twierdzenia o zależnościach między kątami i bokami w trójkącie; – zna pojęcie kąta zewnętrznego wielokąta, umie uzasadnić, że suma kątów zewnętrznych w wielokącie jest stała; – potrafi udowodnić twierdzenie o części wspólnej figur wypukłych; – potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych; – potrafi udowodnić twierdzenie o liczbie przekątnych w wielokącie; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie;	Uczeń: – potrafi wskazać metryki nieeuklidesowe i narysować niektóre figury w tych metrykach; – potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenia mówiące o zależnościach między kątami i bokami w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenia o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą; – potrafi udowodnić twierdzenie o wysokościach w trójkącie; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu

własności tych kątów w rozwiązaniu prostych zadań; – umie określić położenie prostych na płaszczyźnie; – zna pojęcie dwusiecznej kąta i symetralnej odcinka, potrafi zastosować własność dwusiecznej oraz symetralnej odcinka w rozwiązaniu prostych zadań, a także skonstruować dwusieczną danego kąta i symetralną danego odcinka; – zna określenie łamanej, umie stwierdzić, czy dana figura zbudowana z odcinków jest łamaną; – zna określenie wielokąta i przekątnej wielokąta; – zna i potrafi zastosować wzór na liczbę przekątnych wielokąta; – zna pojęcie wielokąta foremnego i potrafi rozróżnić takie wielokąty; – zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty; – zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym poprowadzonej na przeciwprostokątną; – zna twierdzenie o środkowych w trójkącie oraz potrafi je zastosować w rozwiązaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków oraz potrafi je zastosować w rozwiązaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o sumie kątów w trójkącie oraz potrafi je zastosować w rozwiązaniu prostych zadań;	– potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka; – potrafi udowodnić twierdzenie o sumie kątów w trójkącie (wielokącie); – potrafi udowodnić twierdzenia o symetralnych boków i dwusiecznych kątów w trójkącie; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i trójkątów, z zastosowaniem poznanych twierdzeń.	trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i trójkątów, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń.

– zna pojęcie środka ciężkości trójkąta; – zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie; – zna twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – zna trzy cechy przystawania trójkątów i potrafi je zastosować w rozwiązaniu prostych zadań.		
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> Punkty A, B należą do figury wypukłej F. Jakie inne punkty na pewno należą do tej figury? <u>Zadanie 2.</u> Na płaszczyźnie dane są punkty: A, B, P, Q przy czym $A \neq B$, $\lvert AP\rvert = \sqrt{12}$ cm, $\lvert BP\rvert = 3\sqrt{2}$ cm, $\lvert AQ\rvert = \frac{49}{9}$ cm, $\lvert BQ\rvert = 5,(4)$cm. Sprawdź, czy punkty P, Q należą do symetralnej odcinka AB. Z jakiej własności symetralnej skorzystasz? <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie o kątach 20°, 60°, 100° poprowadzono dwusieczne tych kątów. Oblicz miary kątów powstałych w ten sposób sześciu trójkątów. <u>Zadanie 4.</u> Czy poniższe trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.	<u>Zadanie 1.</u> Długości odcinków AB, AC, BC, BD i CD spełniają warunki: $\lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert + \lvert BC\rvert$ oraz $\lvert BC\rvert + \lvert BD\rvert = \lvert CD\rvert$. Uzasadnij, że punkty A, B, C, D leżą na jednej prostej. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie ABC ze środka każdego boku prowadzimy odcinki prostopadłe do dwóch boków. Wykaż, że odcinki te przecinają się parami na wysokościach trójkąta ABC. <u>Zadanie 3.</u> W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne BD i B_1D_1. Wykaż, że jeśli $\lvert BC\rvert = \lvert B_1C_1\rvert$, $\lvert\angle B\rvert = \lvert\angle B_1\rvert$ i $\lvert BD\rvert = \lvert B_1D_1\rvert$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie ABC, $\lvert\angle C\rvert = 60°$, $\lvert\angle B\rvert = 45°$, poprowadzono wysokość CD. Punkt D połączono odcinkiem ze środkiem E boku CB. Uzasadnij, że	<u>Zadanie 1.</u> Czy poniższą figurę można narysować jednym pociągnięciem ołówka, bez odrywania ołówka od kartki, każdy odcinek kreśląc tylko jeden raz? Odpowiedź uzasadnij.  <u>Zadanie 2.</u> Niech a, b, c będą długościami boków w dowolnym trójkącie. Uzasadnij, że prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

	DE ⊥ CB oraz $\lvert DE\rvert = \frac{1}{2}\lvert CB\rvert$.	

17. Podstawowe własności figur geometrycznych na płaszczyźnie, cz.2

Tematyka zajęć:

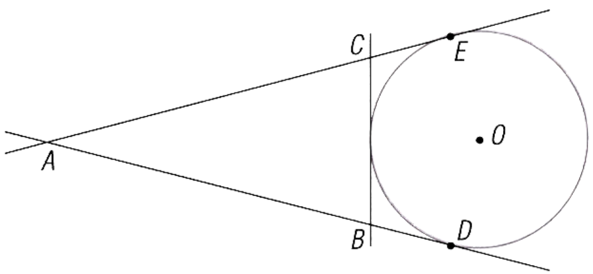
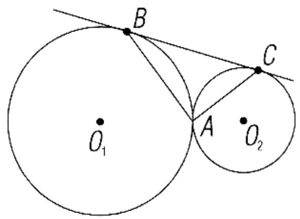
- Koło i okrąg.
- Wzajemne położenie prostej i okręgu.
- Wzajemne położenie dwóch okręgów.
- Kąty w kole (kąty wpisane, kąty środkowe).
- Kąt dopisany do okręgu.
- *Związki miarowe między odcinkami stycznych i siecznych*.
- Czworokąty.
    - Trapezy.
    - Równoległoboki.
    - Trapezoidy.
- Wielokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu.
- Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu.

- Czworokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu.

<table>
<tr><th>Wymagania podstawowe</th><th>Wymagania dopełniające</th><th>Wymagania wykraczające</th></tr>
<tr><td>Uczeń:
– zna definicję koła i okręgu, poprawnie posługuje się terminami: promień, średnica, łuk, środek okręgu;
– umie określić wzajemne położenie prostej i okręgu;
– zna określenie stycznej do okręgu, potrafi skonstruować styczną do okręgu, przechodzącą przez punkt leżący w odległości większej od środka okręgu niż długość promienia okręgu, potrafi skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu;
– zna twierdzenie o stycznej do okręgu, potrafi je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań;
– zna twierdzenie o odcinkach stycznych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań;
– zna twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych i potrafi zastosować je w zadaniach
– umie określić wzajemne położenie dwóch okręgów;
– posługuje się terminami: kąt wpisany w koło, kąt środkowy koła; zna twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań;</td><td>Uczeń:
– zna dowód twierdzenia o odcinkach stycznych;
– zna dowód twierdzenia o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych
– zna dowody twierdzeń o kątach środkowych i wpisanych;
– wie, co to jest kąt dopisany do okręgu;
– zna twierdzenie o kątach dopisanym do okręgu i wpisanym w okrąg – opartych na tym samym łuku;
– zna i potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki przekątnych trapezu;
– wie, że odcinki łączące środek okręgu wpisanego w trapez z końcami jednego ramienia tworzą kąt prosty;
– potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
– zna dowód twierdzenia o odcinku łączącym środki ramion trapezu;
– potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków;</td><td>Uczeń:
– zna dowody twierdzeń o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;
– potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów, czworokątów, wielokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń.</td></tr>
</table>

– zna podział czworokątów; – potrafi wyróżnić wśród trapezów trapezy prostokątne i trapezy równoramienne, poprawnie posługuje się takimi określeniami jak: podstawa, ramię, wysokość trapezu; – wie, że suma kątów przy każdym ramieniu trapezu jest równa 180° i umie tę własność wykorzystać w rozwiązaniach prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu i umie zastosować je w rozwiązaniach prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności trapezów, w tym również z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; – zna podstawowe własności równoległoboków i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – wie, jakie własności ma romb i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – wie, co to są trapezoidy, potrafi podać przykłady takich figur; – wie, czym charakteryzuje się deltoid; – rozumie co to znaczy, że wielokąt jest wpisany w okrąg, wielokąt jest opisany na okręgu; – potrafi konstrukcyjnie wpisać okrąg w dowolny trójkąt; – potrafi konstrukcyjnie opisać okrąg na dowolnym trójkącie; – wie, gdzie znajduje się środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące	– potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i opisanych na trójkącie; – potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązania zadań o średnim stopniu trudności dotyczących trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.	

<table>
<tr>
<td>trójkątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu;
– zna warunki jakie spełniać musi czworokąt, aby można było okrąg wpisać w czworokąt oraz aby można było okrąg opisać na czworokącie; potrafi zastosować te warunki w rozwiązaniach prostych zadań;
– potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych własności trapezu.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Przykładowe zadania</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Zadanie 1.</u>
Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu wynosi 146°. Oblicz miarę kąta, który tworzą styczne poprowadzone przez końce tych promieni.

<u>Zadanie 2.</u>
Odcinek AD na rysunku poniżej ma długość 23 cm. Oblicz obwód trójkąta ABC.

</td>
<td><u>Zadanie 1.</u>
Do okręgów O_1 i O_2 stycznych zewnętrznie w punkcie A poprowadzono wspólna styczną zewnętrzną BC (B, C – punkty styczności). Oblicz miarę kąta BAC.


<u>Zadanie 2.</u>
Uzasadnij, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw.</td>
<td><u>Zadanie 1.</u>
W danym okręgu punkt A jest środkiem łuku BC, a dwie dowolne cięciwy AD, AE przecinają cięciwę BC w punktach B_1 i C_1. Wykaż, że wówczas na czworokącie B_1C_1ED można opisać okrąg.</td>
</tr>
</table>

<u>Zadanie 3.</u> Z kawałka materiału w kształcie trapezu prostokątnego o podstawach długości 1,2 m i 0,4 m oraz wysokości 1,5 m wycięto chorągiewkę w kształcie trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest dłuższe ramię trapezu, a jeden z wierzchołków należy do krótszego ramienia trapezu. a) Wyznacz długości odcinków, na jakie ten wierzchołek podzielił krótsze ramię trapezu. b) Oblicz długości boków chorągiewki. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01 m. <u>Zadanie 4.</u> W równoległoboku ABCD wysokość DE o długości 8 cm dzieli bok AB na odcinki długości: $\|AE\| = 4{,}5$ cm, $\|EB\| = 6$ cm. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku. <u>Zadanie 5.</u> Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 8 cm. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz obwód trapezu.	<u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że środki przekątnych trapezoidu i środki dwóch przeciwległych jego boków są wierzchołkami równoległoboku. <u>Zadanie 4.</u> Trójkąt ABC wpisano w okrąg. Poprowadzono wysokość z wierzchołka C i przedłużono ją do przecięcia z okręgiem w punkcie D. Wykaż, że $\|\angle ADB\| = \|\angle ASB\|$, gdzie S jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. <u>Zadanie 5.</u> W trapez ABCD, $AB \parallel CD$, wpisano okrąg o środku O. Uzasadnij, że $\|\angle BOC\| = 90°$.	

18. Twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów

Tematyka zajęć:

- Twierdzenie sinusów.

- Twierdzenie cosinusów.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna twierdzenie sinusów, potrafi je zastosować do wyznaczenia długości boku trójkąta, sinusa kąta lub długości promienia okręgu opisanego na trójkącie; – zna twierdzenie cosinusów, potrafi je zastosować do wyznaczenia długości boku trójkąta lub cosinusa kąta w trójkącie; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne z zastosowaniem twierdzenia sinusów I cosinusów.	Uczeń: – zna dowód twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem twierdzenia sinusów lub twierdzenia cosinusów.
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie ABC są dane: $\|\angle A\| = 80°$, $\|\angle B\| = 55°$, $\|AB\| = 10$ cm. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 2.</u> Długości boków trójkąta są równe: 2 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz cosinusy kątów tego trójkąta. <u>Zadanie 3.</u> Oblicz długości przekątnych d_1, d_2	<u>Zadanie 1.</u> Przekątna równoległoboku poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego ma długość 18 cm i dzieli ten kąt na kąty o miarach 45° i 75°. Wyznacz długości boków równoległoboku. <u>Zadanie 2.</u> Suma długości dwóch boków trójkąta wynosi 8 cm, a miara kąta miedzy tymi bokami 60°. Jaką najmniejszą wartość ma obwód tego trójkąta?	<u>Zadanie 1.</u> Niech ABC będzie dowolnym trójkątem. Oblicz stosunek $\frac{s_a^2 + s_b^2 + s_c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$, gdzie a, b, c są długościami boków, s_a, s_b, s_c – długościami środkowych tego trójkąta. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne

równoległoboku, którego boki mają długości 3 cm i 5 cm, a kąt ostry ma miarę 30°.	Zadanie 3. Długości boków trójkąta, którego jeden z kątów ma miarę 120°, tworzą trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. W jakim stosunku pozostają długości boków tego trójkąta?	trójkąta spełniają warunek $\sin\alpha = 2\cos\gamma \cdot \sin\beta$, to trójkąt ten jest równoramienny.

19. Pola figur

Tematyka zajęć:

- Pole figury geometrycznej.
- Pole trójkąta.
- Pole czworokąta.
  - Pole równoległoboku.
  - Pole rombu.
  - Pole trapezu.
- Pole koła.
- Pole wycinka koła.
- Długość okręgu, długość łuku okręgu.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – rozumie pojęcie pola figury; – zna następujące wzory na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}a\cdot h_a$, $P = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$, $P = \frac{abc}{4R}$, $P = \frac{1}{2}p\cdot r$, $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$; – potrafi rozwiązywać proste zadania	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzory na pole trójkąta; – potrafi wyprowadzić wzór na pole równoległoboku; – potrafi wyprowadzić wzory na pole rombu; – potrafi wyprowadzić wzór na pole trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń (w tym twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów).

geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi zastosować wzory na pole kwadratu i prostokąta w rozwiązaniach prostych zadań; – zna wzory na pole równoległoboku; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące równoległoboków, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – zna wzory na pole rombu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące rombów, wykorzystując wzory na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – zna wzór na pole trapezu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trapezów, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące wielokątów (trójkątów, czworokątów) wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenia dotyczącego wpisywalności okręgu w czworokąt i twierdzenia dotyczącego opisywalności okręgu na czworokącie; – zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie zastosować te wzory w rozwiązaniach prostych zadań; – zna wzór na długość okręgu i długość łuku okręgu; umie zastosować te wzory w rozwiązaniach prostych zadań.	na pola trójkątów i czworokątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej twierdzeń (m. in. z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i cosinusów).	

<table>
<tr><th colspan="3">Przykładowe zadania</th></tr>
<tr>
<td>Zadanie 1.
W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 10 cm. Oblicz pole tego trójkąta, wiedząc, że promień okręgu opisanego na nim ma długość 19 cm.

Zadanie 2.
W trójkącie, którego pole jest równe 27 cm^2, dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. Jaką miarę ma kąt zawarty między tymi bokami?

Zadanie 3.
Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne długości 13 cm i 8 cm przecinają się pod kątem 60°.

Zadanie 4.
Przekątne rombu mają długość 10 cm i 24 cm. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu i na tej podstawie ustal, czy kąt ostry rombu ma miarę większą od 45°, czy mniejszą.

Zadanie 5.
Obwód czworokąta jest równy 54 cm. W czworokąt ten wpisano koło o promieniu 4 cm. Oblicz pole danego czworokąta.

Zadanie 6.</td>
<td>Zadanie 1.
W trójkącie poprowadzono środkowe, które podzieliły dany trójkąt na sześć mniejszych trójkątów. Wykaż, że pola powstałych trójkątów są równe.

Zadanie 2.
Trójkąt ABC ma pole równe S. Utworzono nowy trójkąt $A'B'C'$ w taki sposób, że $A' = S_B(A)$, $B' = S_C(B)$ i $C' = S_A(C)$. Oblicz pole trójkąta $A'B'C'$.

Zadanie 3.
Obwód pewnego trójkąta jest równy 20 cm, a jeden z kątów ma miarę 30°. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 6 cm. Wyznacz długości boków trójkąta tak, aby jego pole było największe. Oblicz pole trójkąta dla wyznaczonych długości boków.

Zadanie 4.
W równoległobok o krótszym boku długości 5 dm wpisano dwa jednakowe koła o promieniu długości 2 dm, każde styczne do trzech boków równoległoboku i styczne do siebie. Oblicz obwód i pole równoległoboku.

Zadanie 5.
Romb o boku długości 18 cm podzielono na trzy</td>
<td>Zadanie 1.
Wykaż, że jeśli suma długości wysokości trójkąta jest 9 razy większa od długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

Zadanie 2.
Pola trójkątów, których podstawami są podstawy trapezu, a wspólnym wierzchołkiem jest punkt przecięcia się przekątnych tego trapezu, wynoszą P_1 i P_2. Oblicz pole trapezu.</td>
</tr>
</table>

Kąt wpisany w koło ma miarę 45° i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten sam łuk.	części o równych polach prostymi przechodzącymi przez wierzchołek kąta ostrego. Oblicz długości odcinków, na jakie te proste podzieliły boki rombu. <u>Zadanie 6.</u> Na okręgu opisano trapez prostokątny. Odległości środka okręgu od końców dłuższego ramienia wynoszą 3 cm i 7 cm. Oblicz pole trapezu.	

20. Twierdzenie Talesa

Tematyka zajęć:

- Twierdzenie Talesa.
- Wnioski z twierdzenia Talesa.
- Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.
- Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.
- Twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego trójkąta.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna twierdzenie Talesa ; potrafi je stosować do podziału odcinka w danym stosunku, do konstrukcji odcinka o danej długości, do wyznaczania długości odcinka; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i potrafi je stosować do uzasadnienia	Uczeń: – zna twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego trójkąta, umie je udowodnić i stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – zna dowody twierdzenia Talesa, twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta;	

równoległości odpowiednich odcinków lub prostych; – zna wnioski z twierdzenia Talesa i potrafi je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – zna twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta, potrafi je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne wykorzystując: twierdzenie Talesa, wnioski z niego wypływające, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa, twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego.	– potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności z zastosowaniem twierdzenia Talesa, twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego i zewnętrznego trójkąta oraz innych twierdzeń.	
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Dany jest odcinek długości a. Podziel ten odcinek w stosunku: a) 2 : 3, b) 1 : $\sqrt{2}$ Zadanie 2. Dane są odcinki długości a, b oraz c. Skonstruuj odcinek długości: a) $\frac{2ab}{3c}$, b) $\frac{\sqrt{3}ac}{\sqrt{2}b}$ Zadanie 3. W trójkącie ABC dane są długości boków: |AB| = 12 cm, |BC| = 8 cm, |AC| = 10 cm. Punkt D dzieli bok AB na takie dwa odcinki, że |AD| : |DB| = 3 : 5. Przez punkt D poprowadzono prostą	Zadanie 1. Dany jest odcinek długości a. Podziel ten odcinek w stosunku $\sqrt{5} : \sqrt{7}$. Zadanie 2. Dane są odcinki długości a, b, c (a > $\sqrt{3}$ b). Skonstruuj odcinek długości $\frac{b}{c}\sqrt{a^2 - 3b^2}$. Zadanie 3. Wykaż, że jeśli w trójkącie |AB| = c, |BC| = a, |AC| = b oraz CD jest odcinkiem dwusiecznej kąta ACB, zawartym w trójkącie, to $\|AD\| = \frac{bc}{a+b}$, a $\|BD\| = \frac{ac}{a+b}$.	

równoległą do boku AC, która przecięła bok BC w punkcie E. Oblicz długości odcinków: CE, BE i DE. Zadanie 4. W trapezie ABCD, AB || CD, mamy dane: |AB| = 12 cm, |CD| = 7 cm, |AD| = 8 cm. O ile należy wydłużyć ramię AD, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC? Zadanie 5. W trójkącie mamy dane: |AB| = 15 cm, |AC| = 10 cm, |BC| = 12 cm. Oblicz długość odcinków na które dwusieczna kąta ACB podzieliła bok AB.	Zadanie 4. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli bok przeciwległy w stosunku 2 : 3. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.	

21. Jednokładność i podobieństwo

Tematyka zajęć:

- Jednokładność.
- Konstruowanie obrazów figur w jednokładności.
- Podobieństwo.
- Cechy podobieństwa trójkątów.
- Pola figur podobnych.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń:	Uczeń:	Uczeń:

– zna i rozumie definicję jednokładności; – potrafi znaleźć obraz punktu, odcinka, prostej, kąta, wielokąta, koła w jednokładności o danym środku i danej skali; – wie jakim przekształceniem jest jednokładność o skali s = 1 i skali s = –1; – potrafi scharakteryzować jednokładność w zależności od skali s; – potrafi zastosować jednokładność w rozwiązaniach zadań dotyczących wpisywania jednych figur w drugie; – potrafi, na płaszczyźnie z układem współrzędnych, znaleźć obraz figury w jednokładności o środku O(0, 0) i skali s ≠ 0; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące jednokładności; – zna i rozumie definicję podobieństwa; – potrafi podać przykłady figur podobnych; – wie, jaki jest związek między jednokładnością a podobieństwem; – zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować w rozwiązaniach prostych zadań geometrycznych, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń; – zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować w rozwiązaniach prostych zadań, w tym również dotyczących planu i mapy.	– potrafi udowodnić wybrane własności jednokładności; – potrafi, na płaszczyźnie z układem współrzędnych, znaleźć obraz figury w jednokładności o środku O(a, b) i skali s ≠ 0; – umie udowodnić twierdzenie o wysokości w trójkącie prostokątnym poprowadzonej na przeciwprostokątną, wykorzystując podobieństwo trójkątów; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu, wykorzystując cechy przystawania trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych i inne , poznane wcześniej twierdzenia.	– potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem własności jednokładności i podobieństwa oraz innych twierdzeń (w tym twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów).
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u>	<u>Zadanie 1.</u>	<u>Zadanie 1.</u>

Na płaszczyźnie dane są dwa punkty A i A′. Znajdź taki punkt O, aby $A' = J_O^{-2}(A)$. <u>Zadanie 2.</u> Znajdź obraz prostej, będącej wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}x - 3$ w jednokładności o skali $s = \frac{1}{3}$ i środku w punkcie O(0, 0). <u>Zadanie 3.</u> Na płaszczyźnie dany jest ostrokątny trójkąt różnoboczny ABC. Wpisz w ten trójkąt kwadrat KLMN tak, aby $K, L \in AB$, $M \in BC$, $N \in AC$. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie równoramiennym podstawa ma 16 cm długości, a ramię – 17 cm długości. Oblicz odległość środka wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta od ramienia trójkąta. <u>Zadanie 5.</u> Na okręgu zaznaczono kolejno punkty A, B, C, D i narysowano dwie cięciwy AC i BD, które przecięły się w punkcie P. Wiedząc, że |AC| = 24 cm, |PD| = 6 cm, |PB| = 12 cm, oblicz |AP| i |PC|. <u>Zadanie 6.</u> Powierzchnia lasu na mapie zajmuje 200 cm^2. Jaka jest powierzchnia tego lasu w hektarach, jeśli skala mapy wynosi 1 : 25000.	Oblicz długości boków trójkąta równoramiennego ABC, |AC| = |BC|, jeżeli długość wysokości CD wynosi h, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość r. <u>Zadanie 2.</u> W trapezie podstawy mają długość 8 cm i 10 cm. Oblicz długość odcinka, o końcach należących do ramion trapezu, równoległego do podstaw, przechodzącego przez punkt przecięcia przekątnych. <u>Zadanie 3.</u> Niech ABCD będzie dowolnym czworokątem wypukłym. Utworzono czworokąt EFGH łącząc kolejne środki boków czworokąta ABCD. Wykaż, że powstały czworokąt jest równoległobokiem i jego pole jest połową pola czworokąta ABCD.	Dany jest trójkąt różnoboczny T_1. Z jego środkowych zbudowano trójkąt T_2, a ze środkowych trójkąta T_2 zbudowano kolejny trójkąt T_3. Wykaż, że trójkąty T_1 i T_3 są podobne. <u>Zadanie 2.</u> Przez punkt wewnętrzny trójkąta ABC poprowadzono proste $l_1 \parallel BC$, $l_2 \parallel AC$ oraz $l_3 \parallel AB$. Wykaż, że $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{r}{c} = 2$, gdzie m, n, r są długościami odpowiednich odcinków prostych l_1, l_2, l_3 zawartych w trójkącie, natomiast a, b, c odpowiednio długościami boków trójkąta: |CB|, |AC| i |AB|.

22. Stereometria

Tematyka zajęć:

- Proste i płaszczyzny w przestrzeni.
- Rzut równoległy i prostokątny na płaszczyznę.
- Kąt między prostą a płaszczyzną.
- Kąt dwuścienny, kąt wielościenny.
- Graniastosłupy i ich siatki.
- Ostrosłupy i ich siatki.
- Wielościany foremne.
- Bryły obrotowe.
- Przekroje brył.
- Objętość i pole powierzchni brył.
- Izometrie w przestrzeni.
- Jednokładność i podobieństwo w przestrzeni.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi określić położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni; – potrafi określić położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni;	Uczeń: – umie udowodnić wybrane twierdzenia charakteryzujące położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni; – zna określenie i własności rzutu równoległego na	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie o trzech prostopadłych; – zna określenia niektórych izometrii w przestrzeni (przesunięcie równoległe,

– potrafi określić położenie dwóch prostych w przestrzeni; – umie scharakteryzować prostopadłość prostej i płaszczyzny; – umie scharakteryzować prostopadłość dwóch płaszczyzn; – rozumie pojęcie kąta miedzy prostą i płaszczyzną; – zna i umie stosować twierdzenie o trzech prostopadłych; – rozumie pojęcie kąta dwuściennego, poprawnie posługuje się terminem “kąt liniowy kąta dwuściennego”; – zna określenie graniastosłupa; umie wskazać: podstawy, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość, wierzchołki graniastosłupa; – zna podział graniastosłupów; – umie narysować siatki graniastosłupów prostych; – zna określenie ostrosłupa; umie wskazać: podstawę, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość, wierzchołki ostrosłupa; – rozumie określenie “przekrój osiowy stożka” i “kąt rozwarcia stożka”; – zna podział ostrosłupów; – umie narysować siatki ostrosłupów prostych; – zna i umie stosować twierdzenia charakteryzujące ostrosłup prosty i prawidłowy; – zna określenie wielościanu foremnego, potrafi opisać rodzaje wielościanów foremnych;	płaszczyznę; – potrafi wykorzystać własności rzutu równoległego na płaszczyznę w rysowaniu figur płaskich; – zna określenie rzutu prostokątnego na płaszczyznę i potrafi go stosować np. w określaniu odległości między dwiema płaszczyznami równoległymi lub w określeniu kąta między prostą a płaszczyzną; – zna i rozumie określenie kąta trójściennego (wielościennego); – rozumie określenie “przekrój wielościanu” (przekrój bryły obrotowej); potrafi je stosować w rozwiązaniach zadań o średnim stopniu trudności; – umie zaznaczać kąty w bryłach (np. kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa); – umie udowodnić twierdzenie o przekątnych równoległościanu; – potrafi udowodnić twierdzenia charakteryzujące ostrosłup prosty i prawidłowy; – rozumie co to znaczy, że graniastosłup jest wpisany w walec lub opisany na walcu; – rozumie co to znaczy, że kula jest wpisana w wielościan (walec, stożek) lub opisana na wielościanie (walcu, stożku); – zna określenie jednokładności i podobieństwa w przestrzeni; – potrafi stosować twierdzenie o objętości brył podobnych w rozwiązaniach prostych zadań; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, dotyczące brył, o średnim stopniu trudności, z	symetria środkowa, symetria osiowa, symetria płaszczyznowa, obrót); – potrafi podać przykłady brył: środkowosymetrycznych, osiowosymetrycznych, płaszczyznowosymetrycznych; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne, dotyczące brył, o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.

– zna określenie walca; umie wskazać: podstawy, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu walca; – rozumie określenie “przekrój osiowy walca”; – zna określenie stożka; umie wskazać: podstawę, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu, wierzchołek stożka; – zna określenie kuli; – rozumie pojęcie objętości bryły; – umie obliczać objętość i pole powierzchni poznanych graniastosłupów; – umie obliczać objętość i pole powierzchni poznanych ostrosłupów; – umie obliczać objętość i pole powierzchni brył obrotowych (stożka, kuli, walca); – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące brył, w tym z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych wcześniej twierdzeń.	wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń.	
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> Przez punkty A, B leżące poza płaszczyzną π, poprowadzono proste prostopadłe do tej płaszczyzny, przebijające ją odpowiednio w punktach A' i B'. Wiedząc, że $\lvert AA' \rvert = 80$ cm, $\lvert BB' \rvert = 60$ cm, oblicz odległość środka odcinka AB od płaszczyzny π.	<u>Zadanie 1.</u> Na dwóch płaszczyznach przecinających się pod kątem $\frac{\pi}{3}$ leżą proste równoległe m i n, których odległości od krawędzi przecięcia płaszczyzn wynoszą odpowiednio 8 cm i 6,3 cm. Oblicz odległość między prostymi m i n.	<u>Zadanie 1.</u> Przez końce trzech krawędzi równoległościanu schodzących się w jednym wierzchołku poprowadzono płaszczyznę. Udowodnij, że dzieli ona w stosunku 1 : 2 przekątną równoległościanu wychodząca z tego samego wierzchołka.

<u>Zadanie 2.</u> Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego pole wynosi 16 cm^2, a kąt ostry ma miarę $\frac{\pi}{6}$. Pola ścian bocznych tego graniastosłupa są równe odpowiednio 24 cm^2 i 48 cm^2. Oblicz objętość graniastosłupa. <u>Zadanie 3.</u> Wysokość czworościanu foremnego ma długość H. Oblicz długość krawędzi tego czworościanu. <u>Zadanie 4.</u> Na powierzchni kuli dane są trzy punkty, których odległości od siebie wzdłuż linii prostej wynoszą: 6 cm, 8 cm i 10 cm. Promień kuli ma długość 13 cm. Oblicz odległość środka kuli od płaszczyzny wyznaczonej przez te trzy punkty.	<u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że w każdym równoległościanie suma kwadratów przekątnych równa się sumie kwadratów wszystkich jego krawędzi. <u>Zadanie 3.</u> Krawędź ośmiościanu foremnego ma długość 6 cm. Wyznacz odległość między równoległymi ścianami bocznymi. <u>Zadanie 4.</u> Stożek o wysokości długości h wpisano w kulę. Oblicz objętość kuli wiedząc, że jest ona cztery razy większa od objętości stożka.	

23. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Tematyka zajęć:

- Kombinatoryka.
  - Permutacje.
  - Wariacje z powtórzeniami.
  - Wariacje bez powtórzeń.
  - Kombinacje.
- Rachunek prawdopodobieństwa.

- Doświadczenia losowe; zdarzenia elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych; zdarzenie.
- Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.
- Własności prawdopodobieństwa.
- Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem własności prawdopodobieństwa.
- Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.
- Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa.
- Prawdopodobieństwo warunkowe.
- Wzór na prawdopodobieństwo całkowite.
- Niezależność zdarzeń.
- Schemat Bernoulliego.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie permutacji i umie stosować wzór na liczbę permutacji; – zna pojęcie wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń i umie stosować wzory na liczbę takich wariacji; – zna pojęcie kombinacji, umie stosować wzór na liczbę kombinacji; – umie rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne z zastosowaniem poznanych wzorów; – zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się; – zna i rozumie aksjomatyczną definicję	Uczeń: – umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne o średnim stopniu trudności; – umie udowodnić twierdzenie mówiące o własnościach prawdopodobieństwa; – umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań “teoretycznych”; – umie udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki z definicji prawdopodobieństwa; – umie udowodnić wzór na prawdopodobieństwo całkowite; – wie i rozumie na czym polega niezależność n ($n \geq 2$) zdarzeń; – umie wyprowadzić wzór na liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.

prawdopodobieństwa; – zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – umie określić (skończoną) przestrzeń zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego i obliczyć jej moc; – umie określić, jakie zdarzenia elementarne sprzyjają danemu zdarzeniu; – zna i umie stosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa; – zna określenie prawdopodobieństwa warunkowego i umie rozwiązywać proste zadania dotyczące takiego prawdopodobieństwa; – zna wzór na prawdopodobieństwo całkowite i potrafi go stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – zna określenie niezależności zdarzeń; umie zbadać, posługując się definicją, czy dwa zdarzenia są niezależne; – umie rozwiązywać proste zadania dotyczące niezależności zdarzeń; – zna określenie schematu Bernoulliego; zna wzór na liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego; – potrafi stosować schemat Bernoulliego w rozwiązaniach prostych zadań (w tym również z wykorzystaniem własności prawdopodobieństwa).	– umie rozwiązywać zadania dotyczące rachunku prawdopodobieństwa o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń.	
	Przykładowe zadania	
<u>Zadanie 1.</u> Z grupy 6 kobiet i 8 mężczyzn wybieramy losowo	<u>Zadanie 1.</u> W przedziale wagonu kolejowego są ustawione	<u>Zadanie 1.</u> Ile rozwiązań ma równanie

cztery osoby. Ile jest takich sposobów wyboru, aby wśród wybranych osób: a) były same kobiety, b) były dwie kobiety i dwóch mężczyzn? Zadanie 2. Sześcian pomalowano, a następnie rozcięto na 1000 jednakowych sześcianików, które wrzucono do pudełka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego pudełka jednego sześcianika, który: a) będzie miał dwie ściany pomalowane, b) będzie miał jedną ścianę lub dwie ściany pomalowane. Zadanie 3. Na stu mężczyzn – pięciu, a na tysiąc kobiet – dwie, to daltoniści. Z grupy, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi 3 : 7, wylosowano jedna osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to daltonista? Zadanie 4. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Czy niezależne są następujące zdarzenia: A – na obu kostkach wypadła nieparzysta liczba oczek, B – na drugiej kostce wypadła liczba oczek podzielna przez trzy? Zadanie 5. Czy łatwiej jest wygrać z równorzędnym	naprzeciw siebie dwie ławki. Każda ma 5 numerowanych miejsc. Do przedziału weszło pięć osób. Trzy osoby siadły na jednej ławce, pozostałe – na drugiej, naprzeciwko dwóch osób z pierwszej ławki. Ile jest takich rozmieszczeń osób w przedziale? Zadanie 2. Ile jest funkcji ściśle monotonicznych przekształcających zbiór k-elementowy w zbiór n-elementowy ($k \le n$)? Zadanie 3. Wiadomo, że $P(A \cap B') = P(B' \cap A)$, $P(A \cup B) = 0{,}75$, $P(A \cap B) = 0{,}25$. Oblicz $P(B)$, $P(A - B)$. Zadanie 4. Samochód ma do przejechania trzy skrzyżowania z sygnalizacja świetlną. Prawdopodobieństwo, że zatrzyma go światło czerwone wynosi 0,5, o ile na poprzednim skrzyżowaniu było światło czerwone (lub jest to pierwsze skrzyżowanie). Jeśli natomiast samochód trafi na skrzyżowaniu na światło zielone, to prawdopodobieństwo, że na następnym skrzyżowaniu będzie też miał światło zielone wzrasta o 0,1 w stosunku do analogicznego prawdopodobieństwa na poprzednim skrzyżowaniu. Oblicz prawdopodobieństwo, że na tej drodze zatrzyma się: a) na każdym skrzyżowaniu, b) po raz pierwszy na trzecim skrzyżowaniu.	$x + y + z + t = 25$ a) w zbiorze liczb naturalnych dodatnich, b) w zbiorze liczb naturalnych? Zadanie 2. Do sklepu dostarczają żarówki energooszczędne dwa zakłady, będące częściami tej samej firmy, przy czym pierwszy z nich dostarcza trzy razy więcej żarówek niż drugi. W pierwszym z tych zakładów mają wady średnio 3 żarówki na 1000 wyprodukowanych, a w drugim 7 na 1000 wyprodukowanych. Klient kupił żarówkę, na której widniał tylko znak firmy, a nie zakładu, który ją wyprodukował. Żarówka ta w okresie gwarancji zepsuła się. Do którego zakładu sklep raczej powinien się zwrócić z reklamacją?

przeciwnikiem przynajmniej 5 partii z 7 rozegranych czy przynajmniej 4 partie z 6 rozegranych?	Zadanie 5. Z talii 52 kart losujemy trzy karty, oglądamy je i wkładamy do talii. Czynność tę powtarzamy sześć razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej raz wylosowaliśmy trzy asy, jeśli wiemy, że wśród wylosowanych kart ani razu nie pojawiła się dama.	

24. Elementy statystyki opisowej

Tematyka zajęć:

- Dane statystyczne i ich klasyfikacja.
- Średnia z próby.
- Mediana z próby.
- Odchylenie standardowe z próby.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów; – potrafi przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów; – potrafi obliczać średnią z próby, medianę z próby i odchylenie standardowe z próby i na tej podstawie przeprowadzać analizę	Uczeń: – potrafi przeprowadzić klasyfikacje danych i przedstawić je w postaci szeregu rozdzielczego; – potrafi odczytywać dane przedstawione w postaci szeregu rozdzielczego; – potrafi oszacować średnią, medianę i odchylenie standardowe danych przedstawionych w postaci szeregu rozdzielczego i na tej podstawie	

<table>
<tr><td>przedstawionych danych;
– potrafi określać zależności między odczytanymi danymi.</td><td>wyciągnąć odpowiednie wnioski.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Przykładowe zadania</td></tr>
<tr><td><u>Zadanie 1.</u>
Pięćdziesiąt osób zdawało egzamin z przepisów ruchu drogowego. Liczba popełnionych przez nie błędów przedstawiona jest w poniższej tabeli:

Liczba błędów | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5
Liczba osób | 11 | 8 | 14 | 7 | 6 | 4

a) Oblicz średnią liczbę błędów popełnionych przez zdającego.
b) Ile procent zdających zdało egzamin, jeśli można było popełnić co najwyżej dwa błędy?
c) Przedstaw dane na diagramie kolumnowym i zaznacz na nim średnią obliczoną w punkcie a).

<u>Zadanie 2.</u>
Producent czekolady deklaruje, że tabliczka ma wagę 150g ± 2g. Dla zbadania jakości pewnej partii czekolady organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek czekolady z tej partii i otrzymała następującą ich wagę (w gramach):
150,4 148,9 150,1 152,8 146,6 154,3 150,8 151,1 150,6 149,5
Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady i</td><td><u>Zadanie 1.</u>
Badano czas pisania kolokwium (w minutach) przez studentów dwóch grup. Otrzymano następujące wyniki:

Czas pisania | Liczba studentów I grupa | II grupa
$\langle 50, 60)$ | 2 | 1
$\langle 60, 70)$ | 4 | 7
$\langle 70, 80)$ | 8 | 5
$\langle 80, 90\rangle$ | 6 | 7

Oblicz średni czas, odchylenie standardowe i medianę czasu pisania kolokwium dla każdej z grup. Na tej podstawie porównaj te grupy.</td><td></td></tr>
</table>

odchylenie standardowe w badanej próbie. Zastanów się, czy organizacja konsumencka winna zwrócić się do producenta z reklamacją dotyczącą tej partii tabliczek czekolady.		